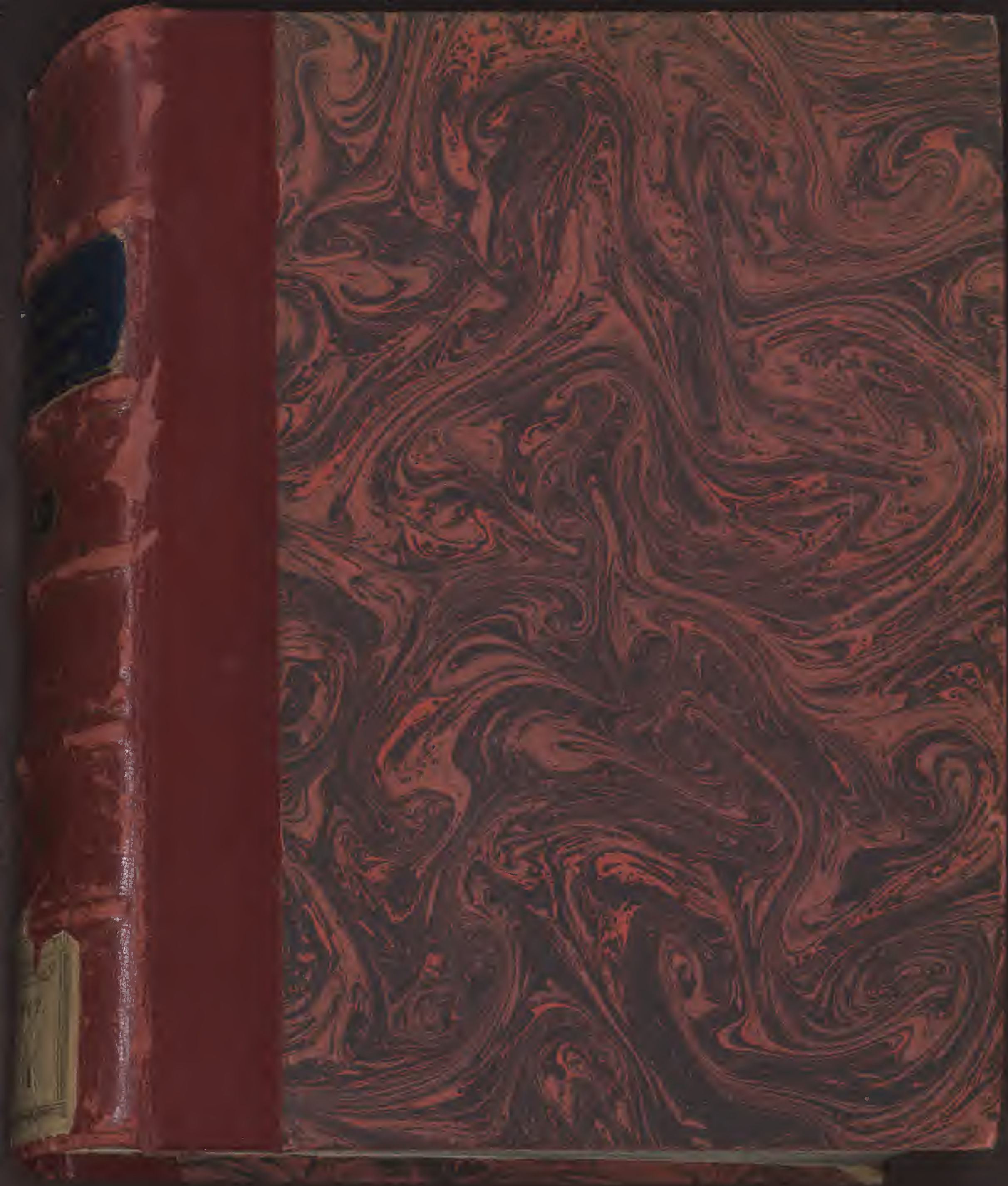
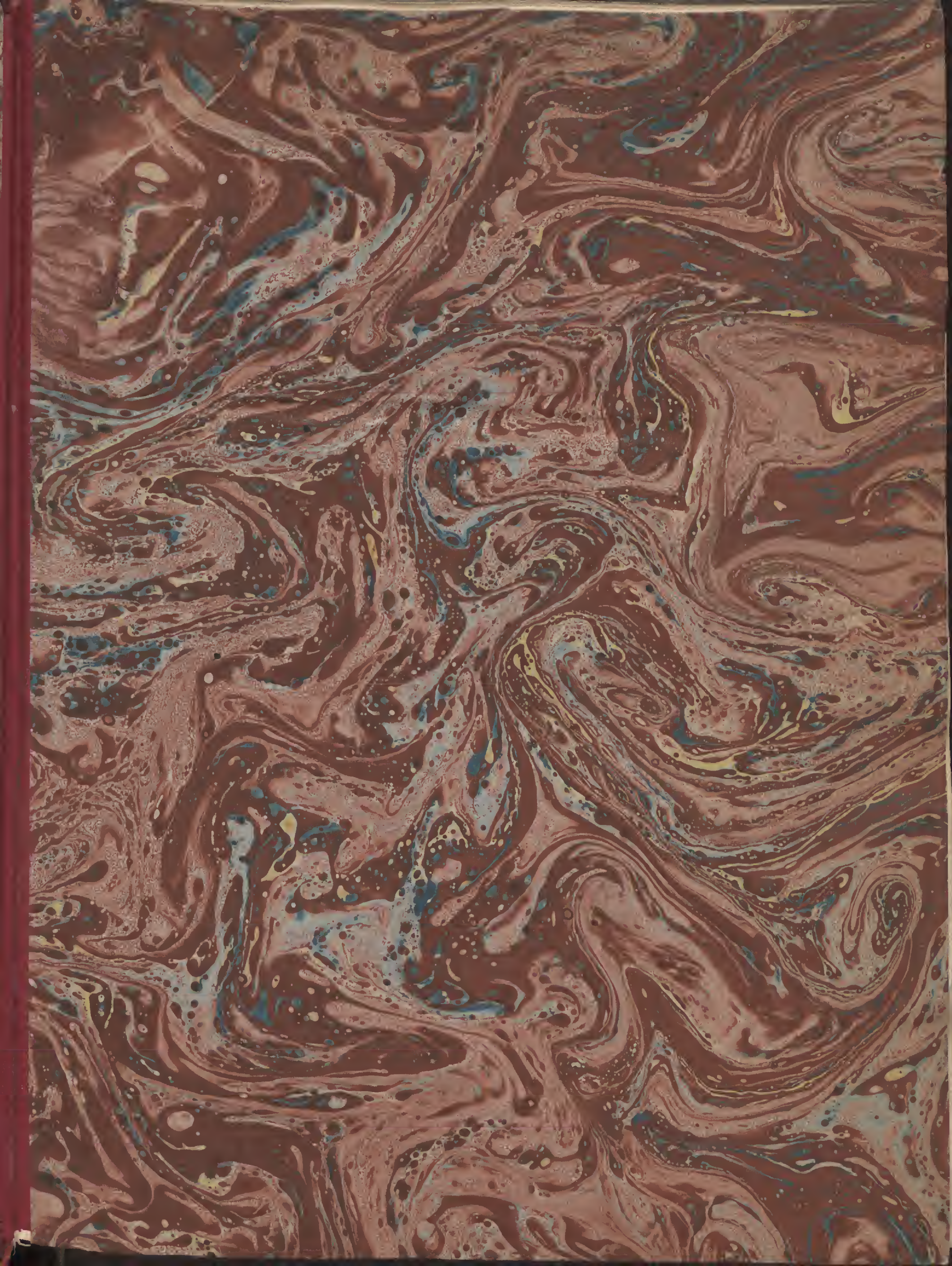






MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES,

LITTÉRATURE ET BEAUX-ARTS.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES,

LITTÉRATURE ET BEAUX-ARTS

DE TURIN,

POUR LES ANNÉES 1811—1812.

SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.



TURIN, MDCCCXIII.

CHEZ FÉLIX GALLETTI IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
des Sciences etc.

INDEX



MÉMOIRE HISTORIQUE

PAR

M.r VASSALLI-EANDI

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Les rapports faits à la Classe soit par ses Commissions, soit par des Membres chargés individuellement de l'examen de quelques objets, écrits, etc. n'est pas, ainsi que je l'ai observé ailleurs (*a*), la partie la moins importante des travaux de la Compagnie.

Ceux que renferme la partie historique des volumes de la Classe des Siences Mathématiques, et Physiques de l'Institut Impérial de France, ne sont pas moins précieux pour marquer les progrès de l'esprit humain que les Analyses des travaux et les Notices de la vie ou les Éloges des Membres du Premier Corps savant de l'Empire.

La Classe, après sa réorganisation par le décret du 17 janvier 1801, basée sur les mêmes principes que l'Institut de France, a publié dans la partie historique du premier volume de ses Mémoires (*b*) la Notice sur

(*a*) Mémoires de l'Académie des Sciences, Littérature et Beaux-Arts de Turin ; Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, vol. 8. Partie historique, pag. LXXV.

(*b*) Qui est le 7.me de la Série à dater de l'Académie Royale des Sciences, et le 12.me à dater de la Société privée, qui a publié son premier Volume en 1759, sous ce titre : *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis*, et quatre autres volumes sous le titre de *Mélanges de philosophie, et de mathématique de la Société Royale de Turin.*

la vie et les ouvrages d'un de ses anciens Membres (l'abbé EANDI), et dans le dernier volume (10.me de la Classe) elle a donné les Éloges de trois autres Membres (REINERI, MARINI et GIORNA).

De tems à autre elle a aussi délibéré d'imprimer plusieurs rapports, dont quelques-uns ont été publiés à part (*c*); l'abondance des Mémoires à insérer dans les volumes a causé le retard de l'impression de quelques autres, dont les suivans font partie.

(*c*) Rapport présenté à la Classe des Sciences exactes de l'Académie de Turin le 27 thermidor an X, sur les expériences galvaniques faites le 22 et le 26 du même mois, sur la tête et le tronc de trois hommes, peu de tems après leur décapitation. Par les Citoyens Vassalli-Eandi, Giulio et Rossi. Turin an X, de l'Imprimerie Nationale.

Rapport présenté à la Classe des Sciences exactes de l'Académie de Turin dans la Séance du 2 nivôse an 11, sur l'action du Galvanisme, et sur l'application de ce fluide et de l'électricité à l'art de guérir. Par Antoine-Marie Vassalli-Eandi. Turin, de l'Imprimerie Nationale.

Rapport des expériences galvaniques faites sur des animaux à sang-chaud et à sang-froid, lu à la Classe des Sciences exactes, le 24 nivôse an XI. Par le Citoyen Rossi. Turin, de l'Imprimerie Nationale.

Rapport sur les nouveaux instrumens géodésiques, présentés par M. Albert Gatti, fait à la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Académie de Turin, le 12 ventôse an XIII. Par M. Provana au nom d'une commission composée de MM. Giorna, Vassalli-Eandi Ignace Michelotti et Provana. Turin, de l'Imprimerie de l'Académie.

Rapport fait à la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Académie de Turin, le 26 ventôse an XIII. Par M. Provana au nom d'une commission composée de MM. Valperga-Caluso et Provana sur une nouvelle méthode simple et presque générale de mesurer géométriquement les corps, trouvée et démontrée par M. Joseph Rossi-Amatis de Savillan. Turin, de l'Imprimerie Philantropique.

Rapport sur les expériences de M. Gensoul, concernant le filage de la soie, en échauffant l'eau des bassines par la vapeur de l'eau bouillante. Fait aux Séances du 8 et 28 novembre 1807 de l'Académie Impériale des Sciences, Littérature et Beaux-Arts de Turin. Par MM. Provana, Bidone et Vassalli-Eandi rapporteur. Turin 1808, chez Dominique Pane et Compagnie imprimeurs des Chambres de Commerce et des Avoués.

RAPPORT

SUR LES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES FAITES SUR LA MER ATLANTIQUE ET DANS LES ISLES ANTILLES, DANS LES ANNÉES 11, 12 et 13.

PAR M.r GAROLA CAPITAINE AU CORPS IMPPÉRIAL DU GÉNIE.

FAIT PAR M.r VASSALLI-EANDI

LÙ LE 9 JUIN 1805 A LA CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES DE L'ACADEMIE DE TURIN.

IL en est des productions littéraires, comme des autres objets : le prix qu'on leur attache est en raison de leur agrément, de leur utilité et de leur difficulté. Les observations météorologiques que M.r GAROLA vient de présenter à la Classe sont précieuses sous chacun de ces trois rapports. Ayant eu lieu dans des contrées où les Européens n'approchent guère que par l'appât des richesses ou de la domination, comme étrangères à leur objet, elles ne sont pas enregistrées, et par-là elles sont très-rares; ayant été faites avec les précautions nécessaires pour reculer les bornes de nos connaissances sur la nature de ces climats, elles sont de la plus grande utilité; le parallèle qu'elles nous présentent des modifications de l'atmosphère dans ces pays avec celles

du nôtre, ne laissent pas d'inspirer de l'intérêt à tous ceux qui s'occupent des Sciences Physiques.

L'Auteur a fait usage du thermomètre de Réaumur et il a indiqué les circonstances principales, dans lesquelles il a fait ses observations. Elles sont renfermées en trois tableaux.

Dans le premier M.r Garola présente la température de l'air à midi à l'ombre dans le mois de ventôse an 11, sur la Mer Atlantique du 29.e degré et 24′ au 19.e et 26′ de latitude, et du 27.me degré et 25′ de longitude au 66.me et 24′, et la température de l'eau à six brasses de profondeur dans cet espace de la Mer.

La température la plus élevée a été de 21.° le 29 ventôse, le ciel étant serein. Le même jour et à la même heure sur l'Observatoire de l'Académie le thermomètre exposé au Soleil a été à 18.°,8 le ciel étant à demi couvert, et le 24 du même mois le ciel étant serein, le thermomètre aussi au soleil a été 19.°,5, d'où il paraît que dans les jours sereins nous avons eu au soleil à-peu-près la même température que M.r Garola a eue à l'ombre sur la Mer Atlantique

Il examina la température de l'eau à six brasses (12 mètres environ) de profondeur, et quelques jours elle s'est approchée de celle de notre atmosphère à l'ombre dans les jours plus chauds du mois. Mais celle de la mer n'a varié que du 17.me au 19.me degré, tandis que l'élévation à midi du thermomètre exposé au nord sur l'Observatoire a varié dans les mêmes jours du 16.me degré à 0,5 au-dessus de la glace.

M.r Garola a noté que pendant ces observations le vent a toujours été d'Est, que la haute température de l'eau est remarquable, et que dans l'espace de mer sus-énoncé l'eau paraît toujours lumineuse à la moindre agitation.

Dans le second tableau l'Auteur offre les observations sur la température de l'air au lever du Soleil, à deux heures après midi à l'ombre, et quelquefois aussi au Soleil dans les mois de pluviôse et de ventôse an 12, à Kingston dans la Jamaïque, et il y ajoute l'état de l'atmosphère dans chaque jour du mois. Dans le mois de pluviôse à Kingston l'élévation du thermomètre au lever du Soleil a varié du 17.e au 21.e degré, et à deux heures après midi à l'ombre du 22.e au 27.e; à Turin le thermomètre exposé au nord a varié au lever du Soleil de 1.°, 5 au-dessous de la glace à 3.°,2 au-dessus, et à midi d'un degré au-dessous de la glace à 11 degrès au-dessus. La plus grande chaleur au Soleil à la Jamaïque a été de 35.°, et à Turin sur l'Observatoire de 21.°,8.

Dans le mois de ventôse à la Jamaïque le thermomètre est resté au lever du Soleil entre 17.° et 19.°1[2 et à deux heures après midi entre 25.° et 20.°, et sur l'Observatoire de Turin à l'exposition du nord entre 11.°,2 au-dessous de la glace, et 4.°1[2 au-dessus au lever du Soleil, et 2.°,1 au-dessous et 13.°,2 au-dessus de la glace à midi. La plus grande chaleur au Soleil a été de 38.° à la Jamaïque, et de 17.°1[2 à Turin.

M.r Garola observe que le climat de la Jamaïque

est bien plus chaud que celui de S. Domingue, quoique la différence dans la latitude ne soit que d'un degré environ.

Dans le troisième tableau M^r. Garola présente les observations faites au Cap Français Isle de S. Domingue situé au 19.° 46′ de latitude septentrionale dans les mois de floréal, prairial et fructidor an 12, et dans les mois de vendémiaire et brumaire an 13. Les limites des variations thermométriques au Cap Français dans lesdits mois de l'an 12, ont été au lever du Soleil du 16.e au 22.e degré. A deux heures après midi à l'ombre, qui est l'heure de la plus grande chaleur, du 22.e au 28.e degré et au Soleil du 32.e au 38.e degré.

Les variations thermométriques à Turin sur l'Observatoire ont été dans les mêmes mois au lever du Soleil du 3.e au 18.e degré; à midi à l'ombre du 10.e au 26.e degré, et au Soleil du 16.e et 1|2 au 33.e et 1|2 degré.

Dans les mois de vendémiaire et brumaire an 13, les variations thermométriques ont été au Cap Français au lever du Soleil du 17.e au 21.e degré, à deux heures après midi à l'ombre du 19.e au 26.e et 1|2, et au Soleil du 34.e au 36.e degré. Dans les mêmes mois à Turin sur l'Observatoire de l'Académie, les variations thermométriques ont été au lever du Soleil d'un degré au-dessous de la glace à 11 degrés 1|2 au-dessus, à midi à l'ombre du 4.°,8 à 23.°,6 et au Soleil de 15.°, 3 à 30.°,4.

Par ces deux tableaux il est évident que les variations thermométriques soit à la Jamaïque, soit à l'Isle de S. Domingue, ne sont pas même la moitié de celles que nous avons à Turin.

L'Auteur a noté qu'au Cap Français le Soleil a passé au Zénith le 29 floréal à midi, en ajoutant plusieurs autres observations intéressantes.

Considérant que ces tableaux avec les notes y jointes donnent des idées plus précises du climat des pays, où les observations ont été faites, que celles des autres voyageurs, je propose à la Classe de les faire connaître dans ses volumes et de nommer l'Auteur, Correspondant de l'Académie.

VASSALLI-EANDI.

RAPPORT

DE

M.r VASSALLI-EANDI

LU A LA CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES DE L'ACADÉMIE DE TURIN, DANS LA SÉANCE DU 24 JUIN 1806.

Sur la description d'un tourbillon observé à Viguzzolo près de Tortone, le 11 *thermidor an* 12. (30 *juillet* 1804)

PAR M.e MAGDELAINE GARIMBERTI-LEARDI.

MESSIEURS,

AYANT à vous rendre compte d'un travail scientifique, fait par une Dame Piémontaise, je n'ai pu m'empêcher de faire précéder le rapport dont vous m'avez chargé, de quelques réflexions et d'une courte notice des femmes illustres, qui, par leurs talens et leurs connaissances dans les Sciences, ont honoré le Piémont et l'Italie entière.

Si je rends, par-là, ma tâche plus difficile et plus

longue *, je la rendrai aussi plus intéressante pour vous, Messieurs, et plus digne de celle, dont l'ouvrage seul aurait dû m'occuper.

Les principes de physique générale, de chimie et d'histoire naturelle que notre illustre Collégue de la Classe de Littérature et Beaux-Arts, Mad.e DIODATA-SALUZZO-ROERO-RÉVEL, a répandus dans ses belles et nombreuses Poësies, nous prouvent que les recherches, dont s'occupe notre Classe, ne sont point étrangères au beau sexe.

On sait que la tendre amie, dont elle a chanté la perte d'une manière si touchante, Mad.e Joséphine PROVANA **, était très-avancée dans les études mathématiques; que sa sœur, Mademoiselle Barberine, heureusement disposée à seconder son frère, Michel-Xavier PROVANA, notre Collégue, dans ses travaux de longs calculs, lui sert en quelque sorte, de vérificateur: *** que Mademoiselle Angélique MICHELOTTI, excitée par les discours familiers de ses frères Joseph-Thérèse et Ignace, nos

* Je donnerai, dans une autre occasion, une Note sur les Dames de Paris et de l'ancienne France, qui ont cultivé avec succès les Sciences exactes. Quant à la Littérature et aux Beaux-Arts, comme ils font partie de la bonne éducation, la liste des dames Françaises qui s'y sont distinguées, formerait plusieurs volumes à ajouter à ceux que l'on a déjà sur les Femmes illustres.

** En 1792 Mademoiselle Joséphine Provana était Directrice d'une Société qui s'occupait aussi des Sciences naturelles V. Notice des travaux de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques, pour les années 1805-1808.

*** Cette respectable dame vient de manquer au bonheur de sa famille. Mad e Diodata-de Saluces en a aussi chanté la perte d'une manière digne d'elle et du sujet; son frère Michel-Xavier lui a fait une très belle et touchante épitaphe.

Collégues, étudiant seule et comme en cachette, dans les momens que ne remplissaient point les soins et les travaux de son sexe, a fait dans l'étude de l'algèbre de si grands progrès, qu'un jour elle donna, au grand étonnement de tous ceux qui l'entendirent, la vraie solution de quelques difficultés que des élèves en mathématique avaient proposées à ses frères *: on sait que Madame Massimino de Salmour, Madame Claudia Calcagnini-Ghilini, et plusieurs autres dames Piémontaises se sont aussi distinguées dans l'étude des Mathématiques; que Mad.e Giorna-Vay a cultivé avec succès l'histoire naturelle, et particulièrement celle des insectes, dont elle forme, ainsi que des oiseaux qu'elle arrange en bas-reliefs, de superbes cadres et de jolis tableaux; que M.lle Bottione peint les plantes d'après nature, et représente l'anatomie des parties de leur fructification avec tant de précision et de délicatesse, qu'elle rend tous les jours l'*Iconographia Taurinensis* ** plus admirable.

* Elle vient d'être nommée de la Société d'Agriculture de Turin, à qui elle a présenté des observations sur les vers à-soie.

** Ouvrage de plus de 40 volumes grand in-folio, dont chacun contient environ 110 planches coloriées, Cette superbe collection a été commencée en 1732, par l'artiste J. B. Morandi qui en a fait 3 volumes sous la direction du Docteur Barthelemi Caccia de Turin, nommé Professeur, le 8 novembre 1729, qui eut pour successeur Vitalien Donati de Padoue, le 6 octobre 1750, auquel 10 ans après, savoir, le 21 septembre 1760, fut nommé professeur-adjoint le Docteur Charles Allioni, qui, par la mort de Donati, eut la chaire de Botanique le 18 décembre 1763. Au Docteur Allioni succédèrent les Académiciens Pierre Marie Dana de Barge, et notre Collégue J. B. Balbis de Moretta. Les Professeurs sus-énoncés dirigèrent les Artistes François Peiroleri de Viù, qui commença à travailler à l'*Iconographia Taurinensis* l'an 1741, auquel succéda son neveu Jean Bottione de Viù en 1766, et à celui-ci sa fille Angélique qui a commencé à travailler pour l'Iconographie l'an 1802, et elle a déjà dessiné plus de 600 plantes. V. Balbis. *Horti Academici plantarum minus cognitarum, ac forte novarum, fasciculus primus = praefatio.*

L'éloquent Docteur Alibert, dans l'éloge du célèbre naturaliste Spallanzani, a fait mention honorable de plusieurs Dames Italiennes qui se sont distinguées dans la culture des Sciences et des Arts, et particulièrement de l'épouse de l'un de nos Collégues, Mad.e Anne Giobert, qui a donné la traduction des Élémens de l'art de la teinture de Poerner, de ceux d'histoire naturelle de M.r Millin, et qui s'occupait à traduire de l'Allemand les nouvelles productions de chimie théorique et appliquée aux arts.

Mad.e Radicati de Coconat a publié d'intéressantes recherches sur quelques plantes, et sur le parti qu'on peut tirer de l'eau qui purge la cire des gâteaux des abeilles.

Mais le nombre des Dames Piémontaises qui cultivent avec succès les Sciences et la Littérature, est trop grand pour qu'elles puissent être toutes comprises dans ce rapport; je ne ferai donc qu'indiquer quelques-unes de celles qui se sont distinguées dans les derniers siècles, telles que Marguerite Varambon, épouse de Hugonin de Saluces, Baron de Cardé, qui en 1460 jouissait de la plus haute réputation, à laquelle ses talens en Littérature Latine, Italienne et Française, et ses connaissances en Médecine et en histoire naturelle l'avaient élevée.

Marguerite Solaro d'Asti, épouse de Jean-François Scaravelli, qui vivait à la fin du 15.e siècle. Elle n'avait pas encore onze ans, lorsqu'elle prononça un discours

de sa composition devant Charles VIII. Roi de France, qui, en revenant de Naples, logea chez son père dans la Ville d'Asti.

Claudia DELLA-ROVERE, épouse d'Etienne de Vinovo, Marguerite ASINARI de Cameran, Hippolyte GAMBARUTI d'Alexandrie, Marguerite BALLIANA et Hippolyte BOBBA de Casal, se sont signalées dans les Sciences, les Lettres et les Beaux-Arts pendant le 16.e siècle.

Benedetta CHIESA de Saluces, Jacopina CASTRUCCI de Mondovì et Jeanne VIALARDI de Casal, ont joui de beaucoup de réputation dans le 17.e siècle; mais celle qui se fit le plus admirer dans ce siècle par l'étendue de ses connaissances en poésie, en musique, en mathématique et en jurisprudence, et particulièrement par ses écrits *de anni cursu*, *de aequinoctio*, *et de Caesaris Calendario reformando*, ce fut Giustina VEGERI, épouse du Marquis George del Carretto *.

En 1714, Clotilde LUNELLI de Cherasco, a publié et défendu publiquement à Turin des Thèses sur toute la philosophie.

En 1726, Emilia DORIA de Dolceacqua, épouse du Comte Amé Valperga de Masino, Marquis de Caluso et d'Albarei, Mère de notre illustre Collégue VALPERGA de CALUSO, possédait plusieurs langues et était savante

* Dans le même tems, Adélaide de Savoye, sœur du Duc Charles-Emanuel II., Métilde Fuazza de Verceil, Catherine Lascaris de la Briga, Isabelle Ponte de Scarnafigi, Isabella Sori d'Alexandrie, et Isabella Leonarde, et Marie-Xavière Parrucona de Novare, se firent une haute réputation par leurs ouvrages de Piété, de Littérature et de Musique.

dans plusieurs parties des connaissances humaines. Parmi les écrits de cette illustre Dame, on distingue les instructions ou leçons à l'usage de sa fille, et un ouvrage poétique en langue française.

Angélique MISCEGLA-VASCO de Pignérol, savait si bien le Latin, qu'elle l'apprit à ses enfans par la conversation habituelle, de sorte que notre ancien Collégue l'abbé VASCO, dès sa première jeunesse, maniait cette langue avec autant d'aisance que le dialecte piémontais. On assûre que chez-elle les domestiques mêmes parlaient latin.

Le rétablissement de l'Université de Turin en 1720, ayant rendu les lettres et les sciences beaucoup plus répandues en Piémont, je passerais les bornes que j'ai dû me prescrire, si je voulais indiquer les Dames qu'on y a vu briller depuis cette époque. Plusieurs ont publié des ouvrages, des mémoires, des lettres sur différens sujets.

M.[lle] Pellegrina AMORETTI d'Oneille, Nièce de notre Collégue Charles AMORETTI, a pris, avec un très-grand éclat, le Doctorat en droit dans l'Université de Pavie, ensuite elle a publié un ouvrage latin *de jure dotium*; Catherine VIALE de Fossan a publié divers écrits pour servir à l'éducation des enfans, etc.; mais mon but n'étant que de parler de celles qui ont joui d'une réputation distinguée dans les sciences exactes, je ne rappellerai que le souvenir de Mad.[e] Marie-Jeanne-Baptiste DEL-CARRETTO de Gorzegno (épouse du Comte Jean-

Baptiste Nicolis de Robilant et Belle-Sœur de notre ancien Collègue, le Minéralogiste du Piémont), qui dans sa jeunesse se fit une grande réputation par ses travaux sur l'algèbre, et par un Mémoire sur l'analyse qui obtint la Couronne Académique, et de Mad.e Jeannette MALACARNE, épouse de notre Collégue Vincent MALACARNE Professeur à Padoue, qui était si estimée du célèbre BONNET, avec lequel elle eut long-tems une correspondance littéraire, et dont il est fait mention honorable dans les volumes de la Société Italienne des Sciences.

Toutes les nations policées ont toujours eu des Dames savantes: BOCCACCIO *, DELLA-CHIESA **, ALBERTI ***, Mad.e TAMBRONI ****, RANZA *****, COTTA, SORESI, et plusieurs autres auteurs en Italie ******, en ont donné des tableaux, des notices, des catalogues, et leurs ouvrages, quoique volumineux, sont bien loin d'être complets.

Dans tous les tems, il en a paru en Italie un nombre considérable, qui a augmenté la célébrité de son nom: plusieurs ont occupé des chaires publiques, et la seule Ville

---

* Delle Donne illustri. Fiorenza 1596.

** Teatro delle Donne letterate del Sig. Francesco Agostino Della-Chiesa. Mondovi 1620.

*** Istoria delle Donne scienziate del Dottore Marcello Alberti. Napoli 1740.

**** Orazione inaugurale detta nella Reale Università di Bologna il dì 11 gennajo MDCCCVI da Clotilde Tambroni, Professora di lingua, e letteratura greca. Bologna, Tipografia di Ulisse Ramponi.

***** Poesie, e Memorie di Donne letterate. Vercelli 1769.

****** Discorsi Accademici di varj Autori viventi intorno agli Studj delle Donne. Padova 1729.

de Bologne a peut-être fourni plus de Dames qui ont professé publiquement, soit dans son Université, soit dans des Universités étrangères, que toutes les autres Villes de l'Europe ensemble.

Je n'examinerai point la cause de ce phénomène, il demanderait une longue discussion ; je dirai seulement, en passant, que, quoique je sois persuadé que le climat et la nourriture ont beaucoup d'influence sur l'entendement, comme notre célèbre Collégue Charles DENINA l'a observé *, je crois cependant que l'éducation et l'exemple sont les causes les plus puissantes de la différence que nous remarquons dans les progrès de l'esprit humain.

Le parallèle des anciens Athéniens et des modernes habitans des restes de la Ville la plus savante et la plus policée de la Grèce, vient à l'appui de ma proposition. Elle est encore confirmée par les précieuses traductions des méditations de DESCARTES, de la Statique des végétaux de HALES, et de l'ouvrage de CARAVITA sur les droits des Papes et des Rois, dont l'Italie est redevable aux Dames Napolitaines BARBAPICCOLA, ARDINGHELLI et Eléonore FONSECA-PIMENTEL. L'homme ne connaît l'étendue de ses facultés que par l'exemple, et il ne sort de la sphère ordinaire, que par l'émulation ; de-là, en grande partie, la contemporanéité des grands hommes

* Considérations d'un Italien sur l'Italie, et ailleurs.

et les siècles d'or ou de fer pour les Sciences et les Arts ; de-là, de préférence la culture particulière de certains arts chez les différentes nations, et même chez les habitans des divers cantons d'un même pays. Il paraît donc que c'est l'exemple et l'éducation qui ont porté les Dames Bolonaises à franchir les limites ordinaires et à se rendre dignes d'avoir des chaires qu'elles ont remplies avec gloire, de sorte que, laissant de côté les tems fabuleux, et partant de notre Ère, de neuf Dames Professeurs, qui se trouvent indiquées dans les ouvrages de DELLA-CHIESA et d'ALBERTI, six sont de Bologne, savoir :

Bettina GOZZADINI, qui professait la Jurisprudence dans l'Université de Bologne vers la moitié du 13.e siècle.

Novella CALDERINI, qui vivait au commencement du 14.e siècle, et remplaçait son père dans la chaire de Jurisprudence, toutes les fois que ses occupations l'empêchaient de vaquer au Professorat.

Bettina CALDERINI, morte l'an 1355, qui professa la Jurisprudence dans l'Université de Padoue.

Dorotea BOCCHI, qui enseigna la Médecine dans l'Université de Bologne en 1419.

Dorotea DOLFI et Virginie PIGNA-MALVEZZI, qui, ainsi que les précédentes, ont occupé honorablement des chaires dans l'Université de leur Patrie.

Outre les sus-énoncées, depuis 1237, époque à laquelle M.e GOZZADINI enseigna à Bologne, cette ville eut encore plusieurs autres Dames Professeurs, entre lesquelles se distinguent honorablement M.e MAZZOLINI, qui cultiva avec succès l'Anatomie, publia plusieurs de

ses travaux et fit les préparations anatomiques en cire à l'usage de l'école, et Mad.e Laure BASSI qui, après avoir pris l'examen du Doctorat en 1732, professa 33 ans la Physique, publia plusieurs Mémoires et Thèses, et fit d'excellens élèves, tels que les célèbres Abbé SPALLANZANI et Chevalier FONTANA.

La réputation dont Mad.e BASSI jouissait dans les Sciences Physiques, porta un grand nombre de Dames Italiennes à l'imiter; on vît paraître Madame Marie PEZZELLI Romaine, qui fournit au célèbre STAY les notices physiques dont il orna son poême *philosophiae recentioris*; Mad.e Henriette TRÈVES de Padoue, qui, ayant acquis beaucoup de connaissances en physique et en histoire naturelle, aida infiniment le célèbre OLIVI dans ses travaux, et fut un protecteur éclairé des Physiciens et des Naturalistes; la Marquise GENTILI-BOCCA-PADULE Romaine, Madame Elisabeth CAMINER-TURRA de Vicence, qui a publié d'importantes notices physiques dans le journal encyclopédique qu'elle a rédigé pendant plusieurs années; les Dames Lucrèce LANDI-MAZZEI et Fortunée SULGHER-FANTASTICI de Florence, Thérèse BANDETTINI-LANDUCCI de Lucques, Henriette DIONIGI-ORFEI de Rome, célèbres poëtes improvisateurs qui animent leurs poésies par des élans philosophiques qui prouvent des connaissances en physique et en chimie, Mad.e Isabelle TEOTOCHI-ALBRIZZI, dont les intéressans écrits sont très-connus, et plusieurs autres

Dames, qui font actuellement la gloire du sexe en Italie.

Avant l'époque de Laure Bassi, plusieurs Dames avaient déjà acquis une grande réputation en Italie par leurs progrès dans les Sciences exactes, telles que Mad.e Clelia Grillo Comtesse Borromée, qui en 1720 fonda chez-elle une Académie des Sciences expérimentales sous la direction du célèbre Antoine Vallisnieri, et Mad.e Francesca Alberti de Sienne, qui en 1719 était Présidente de l'Académie de cette Ville.

En 1678, Hélène-Lucrèce Cornaro-Piscopia, noble Vénitienne, prit les degrés du Doctorat dans l'ancienne et fameuse Université de Padoue; le 18 du mois de juillet suivant, elle fut reçue à l'Académie des Ricovrati: elle cultiva particulièrement les Mathématiques et les Langues.

Marie-Cajétane Agnesi de Milan est très-connue par son ouvrage des Institutions analytiques, par divers Mémoires de Mathématiques et par un discours latin, qu'elle débita à l'âge de neuf ans *, et qu'on publia à Milan en 1727, et à Padoue en 1729. On doit regretter que sa dévotion l'ait portée à regarder la gloire littéraire comme un obstacle à la gloire éternelle, et par-là à cacher ses progrès ultérieurs dans l'Algèbre.

---

* *Oratio habita a Maria De-Agnesis puella Mediolanensi, pro Studiis Mulierum, anno aetatis suae 9.° nondum exacto, die 18 Augusti 1727.*

Des Dames qui dans ce moment cultivent à Bologne ou dans les environs, l'art de guérir, je ne nommerai que Mad.e Marie DALLE-DONNE, Docteur en Médecine, et Professeur de l'art des accouchemens dans l'hôpital de cette Ville; elle a publié en latin et soutenu avec le plus brillant succès des Thèses sur les différentes branches de la Médecine,

Je ne parle pas des Femmes célèbres dans la Littérature et les Beaux-Arts, dont les études n'appartiennent point à notre Classe. Le nombre de celles qui les ont cultivés et les cultivent, est au moins dix fois plus considérable, que celui des Dames qui ont cultivé les Sciences. Il y en a eu aussi de tems en tems qui ont rempli les premières chaires de Littérature en Italie. Bologne en offre encore aujourd'hui un exemple dans la célèbre Clotilde TAMBRONI, notre Collégue associée-correspondante de la Classe de Littérature et Beaux-Arts; mais le nombre n'en est pas aussi grand que celui des Dames qui ont professé les Sciences exactes, à peine en forme-t-il la troisième partie.

Mad.e Magdelaine GARIMBERTI-LEARDI de Viguzzolo, près de Tortone, après avoir acquis de la réputation dans la Littérature Italienne et Française *, nous présente un essai de ses observations physiques.

---

* Sa correspondance littéraire, ainsi que celle de Mad.e Thérèse Van-Loo, épouse du célèbre peintre César Van-Loo, offre, avec une morale sublime, des traits très-spirituels et originaux, dignes des meilleurs écrivains.

La description du tourbillon, dont vous m'avez chargé de faire le rapport, ne laisse rien à desirer ; elle est claire et détaillée, sans être minutieuse, de manière qu'elle pourrait servir de modèle dans son genre. Ce n'est que dans la lettre d'envoi que Mad.e LEARDI a noté les préjugés du peuple sur la nature de ce phénomène.

Le dessin, dont elle a accompagné sa description, est bien orienté, et il présente parfaitement la marche du tourbillon.

Ce météore s'est annoncé par un bruit dans l'air, analogue à celui de la grêle; on a vu ensuite un tourbillon de poussière, d'environ six mètres d'élévation, décrire une ligne courbe, traverser deux fois le torrent Grue, en emporter toute l'eau qui se trouvait dans les cavités de son lit, parcourir un espace d'environ 36 hectomètres, déracinant, rompant les arbres, couvrant de boue les plantes de maïs arrachées et dispersées, jétant les noix comme une fronde, et finir par un sifflement très-fort, en s'élevant rapidement dans l'air. La durée du phénomène a été d'environ 10 minutes, la largeur du tourbillon était de 24 mètres.

La précision et l'exactitude dans la description d'un phénomène, dont on ne connaît pas encore parfaitement la cause, quoiqu'il ne soit pas bien rare, me paraissent rendre cet écrit digne d'être inséré par extrait dans l'histoire des travaux de l'Académie, d'autant plus qu'on y trouve notés quelques effets du tourbillon, qui ne sont pas fréquens dans des phénomènes de cette

sorte, effets qui confirment l'action de l'électricité dans les météores, comme BECCARIA l'avait indiqué, et comme le célèbre Astronome DE-LA-LANDE vient de l'expliquer dans son histoire de l'Astronomie pour l'an 1805.

Si la Classe approuve les conclusions du rapport, l'honneur obtenu par Mad.[e] LEARDI portera d'autres Dames à l'imiter et à chercher dans l'étude de la Littérature et des Sciences naturelles, le délassement des soins et des occupations d'une bonne mère de famille. C'est aussi par-là, Messieurs, que vous concourrez à entretenir, et même à augmenter cette noble émulation qui a produit tant de femmes célèbres dans le Piémont et dans l'Italie.

VASSALLI-EANDI.

OBJETS D'HISTOIRE NATURELLE,

MACHINES, INSTRUMENS, OUVRAGES D'ARTS,

LIVRES ET AUTRES IMPRIMÉS,

Présentés à l'Académie depuis le 1.er janvier 1811, jusqu'au 31 Décembre 1812.

DANS LA SÉANCE du	OBJETS D'HISTOIRE NATURELLE.	DONATEURS Messieurs
30 Mars 1811.	DÉMONSTRATION zoologique et anatomique d'un reptile batracien et d'un mammifère représentés en pièces, soit naturelles, soit imitées en cire et coloriées d'après nature par le Préparateur Louis NADALINI de Bologne.	DE-BALBE Académicien.
30 Avril	Un morceau de bois de mûrier, au milieu duquel il y a un get de mûrier sans écorce, qui a été renfermé par la crue de la souche.	P. APPIA Correspondant.
4 Mai	Trois variétés d'indigo tiré du pastel.	MICHELOTTI Victor Académicien. et BORSARELLI Chimiste-Pharmacien.
21 idem.	Un échantillon de sucre de raisin.	PASTERA Chimiste-Pharmacien.
	Un échantillon de sucre tiré du miel.	CORTESE Chimiste-Pharmacien.
8 Juin.	Plusieurs échantillons de minéraux.	P. APPIA Correspondant.
22 idem.	Cinq échantillons d'indigo tiré du pastel, avec dix flacons, contenant des dissolutions d'indigo, et dix rubans peints pour comparer l'indigo-pastel avec l'étranger.	FONTANA Officier en réforme.

13 Novembre 1811. Deux échantillons de fer oxidulé aimantaire. DUCROS Correspondant.

8 Échantillons de fer octaèdre, de plombagine, de pyrite, de talc et d'actinot. P. APPIA Correspondant.

21 Décembre. Trois échantillons, l'un de minéral, l'autre de fer oxidulé aimantaire, et le 3.e de deux métaux soudés d'une nouvelle manière à l'usage de l'artillerie. DUCROS Correspondant.

Un os du crâne d'un enfant avec une incrustation blanche en quelque endroit. D.r VALLERO Correspondant.

Une petite branche de poirier portant des fruits de seconde recolte. BONELLI Académicien.



DANS LA SÉANCE du	MACHINES, INSTRUMENS ET OUVRAGES D'ARTS.	DONATEURS Messieurs
9 Janvier 1811.	Due disegni incisi in rame rappresentanti il 1.° la testa del celebre Antonio CANOVA, il 2.° il ritratto di S. M. l'Imperatore.	Ange BUCHERON.
13 Juillet.	Un dessin représentant une excroissance cornée sur le gland d'un homme de 74 ans.	MALACARNE Académicien.
13 Novembre.	Un ouvrage en sculpture en ivoire, représentant le tems qui porte la vérité.	TANADEI
	Plan d'un théâtre de l'ancienne ville d'Industria.	MORRA DE-LAVRIAN Correspondant.
23 Mars 1812.	Varj pezzi di monumenti antichi stati trovati negli scavi dal 1808 al 1811, nel sito dell' antica Città d' Industria.	
4 Avril.	Un dessin d'une nouvelle règle pentographique	BUNIVA Architecte.
29 idem.	Disegno relativo alle Memorie del Signor MORRA di Lavriano, intorno alle rovine dell' antica Città d'Industria.	Ettore VERNAZZA-DI-FRENEY.
30 Novembre.	Une gravure représentant un Ennéadécagone magique, avec des feuilles de papier colorié, et différemment découpées.	PAROLETTI Académicien.
30 Décembre.	Una statuetta di bronzo, e una fibuletta figurata, pezzi di antichità stati trovati nelle vicinanze di Centallo in occorrenza di scavi fatti.	MOCCHIA-DI-COGGIOLA.

LIVRES ET AUTRES IMPRIMÉS

PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DU 1.er JANVIER 1811, AU 31 DÉCEMBRE 1812.

DANS LA SÉANCE du		DONATEURS Messieurs
9 Janvier 1811.	NOTICES et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques, publiés par l'Institut de France, faisant suite aux notices et extraits lus au Comité établi dans l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres. Tome 8.e A Paris, de l'Imprimerie Impériale 1810 in-4.°	INSTITUT IMPÉRIAL de France.
	Inscription placée sur le portail de l'Église Cathédrale de Turin, le 6 juillet 1810, jour dans lequel S. M. l'Empereur et Roi a décrété qu'il serait rendu des honneurs funèbres dans tous les départemens de l'Empire à la mémoire de S. E. le Maréchal Lannes Duc de Montebello.	Joseph GRASSI.
	Aperçu sur le Commerce, l'Industrie, les Arts et les Manufactures du Piémont, dédié à M.r le Général Alexandre-Lameth, Préfet du département du Pô. Par Joseph GRASSI, Chef de Bureau de la Préfecture. Turin, chez Pane. (Brochure)	
	Orazione funebre di S. E. il Duca di Mon-	Francesco REGIS.

tebello, Giovanni Lannes, Maresciallo dell' Impero, ec., detta nella Chiesa Metropolitana di Torino il dì 6 luglio 1810 da Francesco Regis, Professore di Letteratura Italiana nell' Accademia di Torino. Torino co' Tipi di Vincenzo Bianco. (Brochure)

12 Janvier 1811. Traité de la Chorée ou Danse de S. Guy, par E. M. Bouteille, Docteur en Médecine de l'Université de Montpellier, ancien associé-régnicole de la Société Royale de Médecine de Paris, de l'Académie de Belles Lettres, Sciences et Arts de Marseille, Médecin du Gouvernement pour les épidémies etc. A Paris chez Vincard Imprimeur, rue du Marché neuf, n.° 3, 1810 vol. 1 in-8.° Bouteille.

Calendario Georgico per l'anno 1811. Société d'Agriculture de Turin.

Ichtyologie de Nice, ou histoire naturelle des poissons du département des Alpes Maritimes, par A. Risso, associé-correspondant de l'Académie Impériale de Turin, correspondant de la Société Philomatique de Paris etc. A Paris chez F. Schœll, rue des Fossés S. Germain 1810, vol. 1 in-8.° Risso Correspondant de l'Académie.

30 idem. Discorso letto alla Società d'Emulazione per la Lingua, e Letteratura Italiana di Lione il dì 4 novembre 1810. Dedicato al Sig. Conte De-Bondy, Ciambellano di S. M. I. e R. Referendario, ec. Prefetto del dipartimento Rusco Correspondant de l'Académie.

del Rodano; da P. Rusca fondatore, e rettore d' essa Società, Socio Corrispondente delle Imperiali Accademie di Torino, Pistoja, ec. Lione dai Torchi di Ballanche 1810. (Brochure)

30 Janvier 1811. Tableaux élémentaires des déclinaisons et conjugaisons de la Langue Italienne avec leur application, et des observations sur les irrégularités des verbes, ainsi que sur le pronom indéfini *On*. — Rusca Correspondant de l'Académie.

Le grazie Messaggiere di Giove. Cantata per musica da eseguirsi nel Teatro Imperiale li 26 gennajo 1811. Omaggio offerto à S. A. I. la Principessa Paolina di Francia, Duchessa di Guastalla ec. — Vincenzo Marenco Académicien.

Journal des Arts, des Sciences et de Littérature N.° 54 (10 janvier 1811) broch. — Rédacteurs.

2 Février. Notices des travaux de l'Académie du Gard pendant l'année 1809, par M.r Trelis secrétaire perpétuel. A Nismes chez la veuve Belle, an 1810, vol. 1 in-8.° — d'Hombres-Firmas Correspondant de l'Académie.

Memoria sopra il quesito proposto dall' Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti di Padova con suo programma 1.° agosto 1810. In che differisca veramente la metafisica del calcolo sublime de Lagrange dalla metafisica dei metodi anteriori. Quale sia il grado della sua superiorità. Se è, come possa ri- — Francesconi Correspondant de l'Académie.

dursi alla semplicità degli altri metodi, massimamente del Leibniziano tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche, o mecaniche del Cavaliere Vincenzo Brunacci, Professore di calcolo sublime nella Università di Pavia, ed Ispettore generale d' acque, e strade. Premiata dall' Accademia medesima nella seduta 12 aprile 1810. Padova per Nicolò-Zanon Bettoni, Tipografo dell' Accademia, vol. 1 in-4.°

Février 1811. Doutes et conjectures sur les Huns du Nord et sur les Huns Français, par Jacques Graberg-De-Hemsô, membre ordinaire de l'Académie Italienne et de plusieurs Sociétés savantes et littéraires. Florence avec les caractères de Didot 1810. (Brochure) — Graberg de Hemsô Correspondant de l'Académie.

Il consiglio ad un Giovane Poeta. Dialogo Socratico recitato nelle adunanze dell' Arcadia da S. E. il Sig.r Barone Degerando, Membro della Consulta straordinaria, dell' Istituto Imperiale, delle Accademie Imperiale di Torino, Reali di Gottingen, e di Monaco, ec., di quella di S. Luca di Roma, fra gli Arcadi Biante Ilisseo. (Brochure) — Dégérando Académicien non Résidant.

Allocuzione del Sig.r Barone G. M. Degerando ec., nel giorno dell' inaugurazione delle nuove scuole di S. Luca.

Dissertazione sopra i beneficj che può ri-

trarre la ricchezza economica degli Stati dal progresso delle Scienze fisiche. Pronunciata nell' Accademia dei Lincei.

6 Février 1811. Orazione recitata nel Campidoglio il dì 16 agosto 1810. DÉGÉRANDO Académicien non-Résidant.

16 idem. Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France. Année 1809, à Paris. Baudouin Imprimeur de l'Institut. Août 1810, vol. 1 in-4.° Institut impérial de France.

20 idem Sur les avantages qu'on pourrait tirer de la lecture des anciens écrivains français, par Théodor LORIN, Correspondant du Musée de Francfort sur le Meyn, de la Société littéraire de Leyde, de l'Académie Italienne, de l'Académie de Soissons etc. Paris 1811. (Brochure) POUGENS Correspondant de l'Académie.

6 Mars. Plan d'un cours de Logique, ou essai d'un choix des matières proposées pour un traité élémentaire de l'art du raisonnement, par G. M. RAYMOND, Principal du Collège de Chambery, Professeur de Mathématique et de Physique, ancien Professeur d'Histoire, Membre de plusieurs Académies, etc. Mémoire inséré dans le Magasin Encyclopédique N.° d'octobre 1810. A Paris, de l'Imprimerie de J. B. Sajou 1811. (Brochure) RAYMOND Correspondant de l'Académie.

Orazione per l'anniversario della Consegrazione e del Coronamento di S. M. l' Imperatore, REGIS Académicien.

della Vittoria d'Austerlitz, detta nella Chiesa Metropolitana di Torino il dì 2 dicembre 1810 dal Canonico Onorario Francesco Regis, Professore di Letteratura nella Torinese Accademia, alla presenza di S. A. I. il Principe Camillo Borghese, Governatore generale dei Dipartimenti di là dalle Alpi. Torino, Stamperia Bianco. (Brochure)

9 Mars 1811. Compte rendu à la Société d'Agriculture de la Seine d'une expérience et des succès obtenus contre la Morve et le Farcin qui infectaient depuis 18 mois les chevaux du 23.e régiment de dragons, par M.r Collaine, Professeur à l'école royale vétérinaire de Milan, suivi du rapport de MM.rs Desplas, Huzard et Tessier. Imprimés par arrêté de la Société. A Paris, de l'Imprimerie de Mad.e Huzard, rue de l'Éperon, N.o 7, 1810. (Brochure) — Huzard, Correspondant de l'Académie.

Annotations sur une note qui se trouve à la fin d'un Mémoire de M.r Raymond, Membre de l'Institut et de plusieurs autres Sociétés savantes etc., par La-Coste (de Plaisance) ex-Professeur d'histoire naturelle à l'école centrale du département du Puy-de-Dôme, Professeur au Lycée, Membre de plusieurs Sociétés savantes. (Broch.) — La-Coste (de Plaisance)

Annotations de La-Coste (de Plaisance)

Professeur des Sciences Physiques au Lycée de Clermont, Membre de plusieurs Sociétés savantes; concernant deux erreurs qui se trouvent dans ses lettres minéralogiques et géologiques sur les Volcans d'Auvergne. (Brochure)

9 Mars 1811. Della erudizione degli Artisti. Discorso del Cavaliere Luigi Bossi. Padova per Nicolò Zanon Bettoni 1810, vol. 1 in-8.° — Louis Bossi Correspondant de l'Académie.

16 idem. Catalogue raisonné du Musée d'histoire naturelle de l'Académie de Turin. Partie minéralogique selon le système de M.r A. Brongniart, par Étienne Borson, Membre de l'Académie Italienne, de celle des Beaux-Arts de Florence et de la Société de Vétéravie. Tome 1.er Turin, chez Bianco. 1811, vol. 1 in-8.° — P. Balbe Académicien.

27 idem. Per la nascita del Primogenito di S. M. I., e R. Napoleone I. Sonetto. — Vincenzo Marenco Académicien.

Pour la fête de la Paix et de Napoléon le Grand; Couplets. — Rouve-de-Savy Correspondant de l'Académie.

30 idem. Séance publique tenue le 22 août 1810. Dyon de l'Imprimerie de Frantin 1810 vol. 1 in-8.° — Académie des Arts et Belles Lettres de Dijon.

17 Avril. Nell' imminente auguratissimo parto di S. M. Maria Luisa, Imperatrice di Francia, e Regina d'Italia. Carme tradotto in versi sciolti da P. L. Raby, Dottore collegiato della facoltà di Belle Lettere nell' Imperiale Acca- — Raby

demia di Torino, Capo della prima Divisione della Prefettura del dipartimento del Po, 1811. (broch.)

17 Avril. 1811. Empedoclis et Parmenidis fragmenta ex codice Taurinensi Bibliothecae restituta et illustrata ab Amedeo PEYRON, in Taurinensi Academia LL. Orient. Professore vicesgerente. Simul agitur de genuino Graeco textu commentarii Simplicii in ARISTOTELEM de caelo et mundo. Lipsiae sumpt. Joa. Aug. Gotti Weigel 1810, vol. 1. in-4.° PEYRON.

Descrizione di un Evangeliario Greco Manoscritto, posseduto dal Sig.r Prospero BALBO, fatta da Vittorio Amedeo PEYRON. Torino 1808, dalla Stamperia di Vincenzo Bianco, vol. 1 in-8.°

Nouveau traité de Mnemonique ou de l'art d'aider et de fixer la Mémoire. Appliqué à la géographie, à la chronologie et à l'histoire avec 100 figures, par L. A. GISSEY. Turin 1811, de l'Imprimerie Sociale, vol. 1 in-8.° GISSEY.

Ode sur la naissance du Roi de Rome (feuilleton.) DE-CRESSY Correspondant de l'Académie.

Alla Cuna del Primogenito figlio di Napoleone il Grande, e di Maria Luisa d' Austria. Canzone. David BERTOLOTTI.

20 idem. Horti Academici Taurinensis stirpium minus cognitarum aut forte novarum Icones et des- BALBIS Académicien.

criptiones. Auctore Joanne Baptista BALBIS, Taurini 1810.

20 Avril 1811. Réservoirs artificiels ou manière de retenir l'eau de pluie, et de s'en servir pour l'arrosement des terreins qui manquent d'eaux courantes, par Hyacinthe CARENA, Docteur en Philosophie, Membre de l'Académie Impériale des Sciences, et Associé libre de la Société d'Agriculture de Turin. Turin 1811, de l'imprimerie de l'Académie Impériale, vol. 1 in-8.° — H CARENA Académicien.

Annales de l'Observatoire de Turin, avec des notices statistiques concernant l'Agriculture et la Médecine, par le Professeur VASSALLI-EANDI, 1810, 1.er semestre. Turin de l'Imprimerie Sociale, vol. 1 in-4.° — P. BALBE Académicien.

24 idem. Della origine della stampa in tavole incise, e di una antica, e sconosciuta edizione tolografica del Dottore G. Bernardo DEROSSI, Professore di lingue orientali. Parma, dalla Stamperia Imperiale. 1811. (Broch.) — DEROSSI Académicien non Résidant.

4 Mai. Histoire littéraire d'Italie, par L. GINGUENÉ, Membre de l'Institut de France, Associé-correspondant de l'Académie Impériale de Turin, des Athénées de Niort et de Vaucluse, Membre de l'Académie Celtique etc. trois vol. in-8.° A Paris, chez Michaud, Imprimeur-Libraire, rue des Bons-Enfans, n.° 34. (1811). — GINGUENÉ Correspondant de l'Académie.

4 Mai 1811. Fables nouvelles 1810 vol. 1 in-12. GINGUENÉ Corresp. de l'Académie.

Costruzione geometrico-piana delle equazioni di terzo, e quarto grado, del Capitano Pasquale NOVARRO, Socio dell' Accademia Pontoniana. (Broch.) NOVARRO.

8 Juin. De la gale des moutons, de sa nature, de ses causes et des moyens de la guérir. Traduit de l'Allemand de G. H. VALZ, vétérinaire, avec une planche. A Paris de l'Imprimerie de Mad.e Huzard, rue de l'Éperon, n.° 7, 1811, vol. 1 in-8.° HUZARD Correspondant de l'Académie.

Conjectures sur l'existence de quelques animaux microscopiques, considérés comme cause de plusieurs maladies des moutons. Mémoire lu le 18 mars 1811 à la première Classe de l'Institut, par C. MOREL de Vinde. A Paris, de l'Imprimerie de Mad.e Huzard.

Sull' utilità del dolore. Discorso Accademico di B. MOJON, Dottore in Medicina, ed in Chirurgia, pubblico Professore d' Anatomia nell' Imperiale Accademia di Genova, Segretario del Comitato Centrale di Vaccina, Membro di varie Accademie, ec. Letto alla Società Medica d' Emulazione. Genova, da Yvone Gravier, 1811. (Broch.) MOJON Correspondant de l'Académie.

Ordre des lectures de la Séance publique du 28 avril 1811. Académie de Marseille.

Programme des prix annuels d'encouragement pour l'Agriculture et les Arts.

12 Juin 1811. Nei Natali di S. M. il Re di Roma. Carmi Genetliaci. Torino, coi Tipi di Domenico Pane, 1811 in-fol.° MARENCO Académicien.

22 idem. Trattato di Agricoltura del Medico Giovanni BIROLI vol. II. Novara, dalla Tipografia Mezzotti 1810 vol. 1 in-8.° BIROLI Correspondant de l'Académie.

Esperimenti sopra lo zuccaro di Barbabietole, seguiti da varj pensieri, e progetti sopra la sua fabbricazione in grande, come pure sulla coltivazione della Barbabietola. Opera di Guglielmo Augusto LAMPADIUS, Professore di Chimica, e Metallurgia nell' Accademia Mineralogica di Freyberg. Tradotta dal Tedesco, e dedicata alla Società Agraria del Dipartimento d'Agogna. Novara nella Stamperia Rosarco, n.° 166, 1811. (Broch.)

Mémoire sur deux faits nouveaux, l'inflammation des matières combustibles et l'apparition d'une vive lumière, obtenues par la seule compression de l'air, lu dans la Séance publique de l'académie de Lyon le 27 mars 1804, par J. MOLLET, Membre de ladite Académie, et actuellement doyen de la faculté des Sciences. MOLLET.

26 idem. Idée d'un tableau ou état général de la France sous le règne de Napoléon le Grand, pour servir à l'éducation de S. M. le Roi de Rome, LABOULINIÈRE.

Prince Impérial, par P. Laboulinière, Secrétaire général de la Préfecture du département des Hautes Pyrénées, Membre de l'Académie Impériale de Turin et de plusieurs Sociétés savantes. A Tarbes de l'Imprimerie de F. Lavigne 1811, brochure in-f.°

26 Juin 1811. Regi Romae Augusto Napoleoni Francisco Carolo Josepho Carmen Genetliacum Francisci Regis in Taur. Acad. Litteraturae Italicae Professoris, Scientiarum, Litterarum et Artium Caesareae Academiae Socii Aug. Taur. in aedibus Acad. Typis Vincentii Bianco. 1811, (Broch.) — Regis Académicien.

13 Juillet. Memorie dell' Istituto nazionale italiano, Classe di Fisica, e Matematica, tom. II, parte II. Bologna 1810, presso i Fratelli Masi vol. 1 in-4.° — Institut national Italien.

Memorie di Matematica, e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, tom. XV, parte 1.ª, contenente le Memorie (1811), e tom. XV, parte 2.ª. contenente le Memorie di Fisica (1810). Verona dalla Tipografia di Luigi Mainardi, tom. 2 in-4.° — Società Italiana delle Scienze.

Sessione pubblica della Società di Medicina di Venezia, tenuta il dì 30 di dicembre 1810. Per G. Picotti Tipografo della Società, gennajo 1811. — Società di Medicina di Venezia.

Saggio di dissertazione istorica sugli scaldi, o antichi poeti scandinavi. (feuilleton) — Graberg Correspondant de l'Académie.

13 Novembre 1811. Base du système métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien entre Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par MM.[rs] MÉCHAIN et DÉLAMBRE. Redigé par M.[r] DÉLAMBRE, chevalier de l'Empire, trésorier de l'Université Impériale, secrétaire perpétuel de l'Institut pour les Sciences Mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collège de France, Membre du Bureau des longitudes, de la légion d'honneur et de plusieurs Académies, tom. 3.[e] Paris Badovin Imprimeur de l'Institut de France, novembre 1810 vol. 1 in-4.° Institut impérial de France.

Como, dramma con maschere di Milton, rappresentato a Ludloue Castle nel 1634, in presenza di Giovanni Egerton, Conte di Bridgewater, Lord Presidente allora di Galles. Traduzione sostenuta *ad litteram.* Parigi dai torchi di Carlo Crapelet, via dell' Arpa, n.° 19, 1806, et Comus masque de Milton, etc. Traduction littérale dans le même volume in-4.°

Saggio istorico sugli scaldi, o antichi poeti scandinavi di Jacopo GRABERG-DI-HEMSÒ, vice-console di Svezia in Genova, Membro di varie Accademie. Pisa presso Molini, Landi, e Comp. Co' caratteri di Didot, 1811, vol. in-8.° GRABERG-DE-HEMSÔ Correspondant de l'Académie.

13 Novembre. 1811. Viaggio dal mare Atlantico al Pacifico per la via del Nord-Ouest, fatto dal Capitano Lorenzo Ferrer Maldonado l'anno MDLXXXVIII. Tradotto da un manoscritto Spagnolo, inedito da Carlo AMORETTI, Cavaliere dell' Ordine della Corona Ferrea, Membro dell'Istituto reale, e del consiglio delle miniere, uno dei 50 della Società Italiana delle Scienze, dell' Accademia di Torino, di Genova, di Napoli, di Baviera, ec. Bibliotecario nell' Ambrosiana di Milano. Milano 1811, dalla Tipografia di Gio. Silvestri, n.° 99, vol. 1 in-4.° Charles AMORETTI Académicien non-Résidant.

Odi due della egregia Signora Massimina ROSELLINI-FANTASTICI. Parma co' tipi Bodoniani 1809, brochure, in-4.° BARONI. de plusieurs Académies.

Trattato mineralogico, e chimico sulle miniere di ferro del dipartimento del Mella, con l' esposizione della costituzione fisica delle montagne metallifere della Val-Trompia. Di G. B. BROCCHI P. Professore di Storia naturale nel Liceo del Dipartimento del Mella, Segretario perpetuo dell' Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti di Brescia, Membro della Commissione alle Miniere del Regno d' Italia. Brescia per Nicolò Bettoni, 1807, 1808, vol. 2 in-8.° BROCCHI.

Memoria Mineralogica sulla Valle di Fassa.

Milano per Giovanni Silvestri, 1811, vol. 1 in-8.°

13 Novembre 1811. Introduzione alla Geologia di Scipione Breislak Amministratore, ed Ispettore de' Nitri e delle polveri del Regno d'Italia, Socio di diverse Accademie. Parte 1.ª e 2.ª Milano dalla Stamperia Reale 1811, vol. 2 in-8.° Breislak. Correspondant de l'Académie.

Recherches de Physiologie et de Chimie pathologiques pour faire suite à celles de Bichat sur la vie et la mort. Par P. H. Nysten, Docteur en Médecine, Professeur de matière médicale, Médecin des dispensaires, Préparateur de chimie à la faculté de Paris, Membre de plusieurs Académies. A Paris chez J. A. Brusson, Libraire, rue Pierre Sarrazin, N.° 9. 1811, vol. 1 in-8.° Nysten.

Excursion à la Villa del Foro, ancien Forum, appelé par quelques Géographes, Forum statiellorum, situé à 3 milles de Piémont, ou à 7 à 8 kilomètres d'Alexandrie. Lesne.

Mémoire lu à la Séance extraordinaire de la Société des Indefessi, le 7 juillet 1810, par M.r Lesne Inspecteur des Hôpitaux militaires, Membre de plusieurs Sociétés savantes et littéraires. Alexandrie, de l'imprimerie de Louis Capriolo, en mai 1811, vol. 1 in-8.°

13 Novembre 1811. Mémoires lus à la Séance publique du 7 juillet 1811. Brochure. — Société d'Agriculture du Département de Seine et Oise.

Extrait de l'Instruction de M.r TESSIER sur les Bêtes à laine, et particulièrement sur la râce de Mérinos. Par M.r HURTREL-d'ARBOVAL, Correspondant, amateur et praticien vétérinaire, Membre de plusieurs Sociétés savantes. Publié par la Société d'Agriculture, de Commerce, et des Arts de Boulogne sur Mer. Boulogne, Imprimerie de Leroy-Berger, 1811. (Brochure.) — Société d'Agriculture de Commerce et des Arts de Boulogne sur Mer.

Considérations sur quelques plantes oléagineuses propres à suppléer, ou à économiser l'huile d'olives, 1811. (Brochure.) — Société d'Agriculture de Toulouse.

La naissance du Roi de Rome. Ode Italienne, accompagnée d'une médaille. Par M. PETRONI, Auteur de la Napoléonide, traduite en Français par M.r TEREY, traducteur de la Napoléonide. A Paris de l'Imprimerie de P. Didot, l'année 1811. (Brochure in-f.°) — PETRONI.

Précis analytique des travaux de la Société pendant le cours de l'année 1810. A Nancy de l'Imprimerie de J. R. Vigneulle, mai 1811. (Brochure.) — Société des Sciences, Lettres, Arts, et Agriculture de Nancy.

Compte rendu des travaux de l'Académie de Belles Lettres, Sciences et Arts de Lyon, pendant le premier semestre 1811. (Brochure). — Académie de Lyon.

13 Novembre 1811. Coup d'œil sur l'influence que la Société d'Agriculture du Département de Seine et Oise a exercée sur l'amélioration de l'Agriculture. Par M.r le Sénateur Comte François de NEUCHATEAU, Président. A Paris chez Mad.e Huzard, rue de l' Epéron, n.o 7. (Brochure). Société d'Agriculture de Seine et Oise.

Programme de la Séance publique du dimanche 21 juillet 1811.

Prix d'encouragement decernés à la Séance publique du 25 août 1811, et ordre des lectures faites dans la même Séance. (feuilletons). Académie des Sciences de Marseille.

Programme de la Société des Sciences, Belles Lettres et Arts de Bordeaux, Séance publique du 9 septembre 1811. (feuilleton). Société des Sciences de Bordeaux.

Elenchus clarissimorum Professorum Academiæ Taurinensis, et rerum quas docebunt. Item Ordo Scholarum. Anno scholastico 1812. Typis excussus a Vincentio Bianco. DE BALBE Académicien.

Materies Medica prælectionibus Academicis accommodata, auctore Joanne Baptista BALBIS in schola medica Taurinensis Academiæ Botanices, et Pharmaceuticæ artis Professore, Hortique Academici Præfecto, Imperialis Scientiarum, Literarum, et Artium Taurinensis Academiæ sodali, Societatis Agrariæ Taurinensis Præside; Academiæ di- BALBIS Académicien.

visionensis, Societatis Imp. Scientiarum, Literarum, et Artium, ac Medicæ Genuensis, naturalis Vetteraviæ Socio, etc. Pars 1.ª et 2.ᵈᵃ 1811, in Ædibus Academiæ Taurinensis, Typis Vincentii Bianco, vol. 2 in-8.

13 Novembre 1811. De la richesse minérale. Par M.ʳ HERON de Villefosse, Inspecteur divisionnaire des Mines et Usines de l'Empire. Extrait par M.ʳ PATRIN Bibliothécaire de la Direction générale des Mines. Paris de l'Imprimerie de J. B. Sajou, rue de l'Harpe, n.° 11, 1811. (Brochure). — LAUMOND Conseiller d'Etat.

Principes de Philosophie pour des initiés aux Mathématiques par M.ʳ VALPERGA de Caluso, Membre de la Légion d'Honneur, de l'Académie Impériale de Turin, de la Société Italienne des Sciences, etc., Correspondant de l'Institut, etc. Turin 1811, par Vincent Bianco, vol. 1 in-8. — VALPERGA DE CALUSO Académicien.

Carte de la plus grande partie de la Turquie d'Europe. Par Cajetan PALMA. Trieste 1811. (2 feuilles). — PALMA.

21 Décembre. Description d'un instrument qui a servi au monnoyage. — MILLIN Correspondant de l'Académie.

Dissertation sur un sceau d'Alaric Roi des Goths.

Lettre à M.ʳ Bodman, Président du Tri-

bunal des Douanes et Bibliothécaire à Mayence, sur les monnayes qu'on attribue à la Reine Brunchaut, et sur quelques pièces de Théodebert. (3 feuilletons.)

21 Décembre 1811. Descrizione del Trachigonimetro, nuovo stromento geodelico, che dietro il voto dell'Istituto R. d'Italia, ha dal Real Governo conseguito il premio della medaglia d'oro, accompagnata dal metodo, con cui si deve servirsene per delineare con una sorprendente celerità una carta militare, per modellar nel più breve tempo il rilievo d'un paese montuoso, od in qualunque altra operazione geodetica, per cui non esigasi una precisione maggiore di due minuti nella misura degli angoli; di Giuseppe MARZARI-PENCATI (con tavole in rame). Milano 1811, per Francesco Sonzogno di Gio. Battista, Corsía de' Servi n.º 596, vol. un in-4.º — MARZARI PENCATI Correspondant de l'Académie.

Codex pharmaceuticus pronosocomicis Hospitiis cæterisque beneficentiæ Istitutis Civitatis Taurinensis illustrium Administratorum jussu editus. Taurini 1806. — ANFORNI.

Editio secunda emendata et aucta. Taurini 1811, ex Typographia Joannis Giossi.

Exposition d'une nouvelle manière pour lever les plans, ou description d'un nouvel instrument imaginé à cet usage par Joseph — PARODI.

PARODI Géomètre de I.re classe du Cadastre. (Brochure).

21 Décembre 1811. Catalogus stirpium Horti Academici Taurinensis ad annum 1812. Augustæ Taurinorum, in Ædibus Acad. Typis Vincentii Bianco, vol. 1 in-8.° — BALBIS Académicien.

8 Janvier 1812. Plan, coupe et élévation du Palais de l'Institut Impérial de France, suivant sa nouvelle restauration. Détails de l'installation de cet établissement, par A. VAUDOYER. A Paris, 1811. (Brochure.) — VAUDOYER Correspondant de l'Académie.

Istruzione de' fanciulli, di MURETO, trasportata in quartine italiane dalla Parafrasi francese di François de NEUCHATEAU, da Luigi RICHERI, 5.a edizione ricorretta, coll' aggiunta del testo originale. Torino, 1808, Stamperia Giossi. (Brochure). — RICHERI.

Caratteri, e Pitture di moderni costumi, in versi sciolti di Emidonte Melatejo. Genova 1808, Stamperia Giossi.

22 Idem. Como. Dramma con maschere di Milton, rappresentato a Ludlow-Castle nel 1634, in presenza di Giovanni Egerton, Conte di Bridgewater, Lord Presidente allora di Galles. Traduzione sostenuta *ad literam*. Parigi dai Torchj di Carlo Crapelet, via dell' Arpa, n.° 19, 1806, vol. 1 in-4.° — CÉSAR DE SALUCES Académicien.

12 Février 1812. Gli augurj delle Muse, cantata per musica da eseguirsi nell' Imperiale Teatro di Torino il dì 26 Gennajo 1812. — MARENCO Académicien.

15 idem. Base du systême métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les paralléles de Dunkerque et Barcellone, exécutée en 1792, et années suivantes par MM. MÉCHAIN, et DELAMBRE; redigée par M.r DELAMBRE, Secrétaire perpétuel de l'Institut pour les Sciences mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collège de France, Membre du Bureau des Longitudes, etc. etc. Tome 2.d Paris. Badouin Imprimeur de l'Institut de France. Juillet 1807, Tome 1 in-4.° — Institut Impérial de France.

Essai sur les maladies, et les lésions organiques du cœur, et des gros vaisseaux. Par J. N. CORVISART, premier Médecin de LL. MM. II. et RR., Baron de l'Empire, Officier de la Légion d'Honneur, Professeur honoraire de la Faculté de médecine, et du Collége de France, Médecin en chef adjoint de l'Hôpital de charité, Président honoraire perpétuel de la Société médicale d'emulation, Membre de la plus part des Sociétés Savantes de l'Empire Français et étrangères. Paris de l'Imprimerie des Dames, 1811, vol. 1 in-8.° — CORVISART Correspondant de l'Académie.

Nouvelle métode pour reconnaître les ma-

ladies internes de la poitrine par la percussion de cette cavité. Par AVENBRUGGER, Médecin de la Nation Espagnole dans l'Hôpital Impérial de Vienne en Autriche, Ouvrage traduit du latin, et commenté par J. N. Corvisart, premier Médecin, etc. Paris de l'Imprimerie de Mignoret 1808, vol. 1 in-8.°

15 Février 1812. Saggio sulla leva idraulica nuovamente applicata alle manifatture, od alle arti, del Cavaliere Giovanni ALDINI, Consigliere di Stato, Membro dell' Istituto Reale, della Società Reale delle Scienze di Madrid, di quella di Monaco, delle Società mediche di Parigi, di Londra, di Montpellier, Professore onorario della Imperiale Università di Wilna, e Membro di varie accademie. Milano dalla Stamperia Reale 1811, vol. 1 in-8.° — ALDINI Correspondant de l'Académie.

Compte rendu des travaux et de la situation de la Société d'Emulation et d'Agiculture du Département de l'Ain. (Brochure). — Société d'Emulation et d'Agriculture du Département de l'Ain.

21 Mars. Nouvelles Tables d'aberration et de nutation pour quatorze cent étoiles, avec une Table générale d'aberration pour les Comètes, précédée d'une instruction qui renferme l'explication et l'usage de ces Tables; suivies de plusieurs nouvelles Tables destinées à — DE ZACH Académicien non-résident.

faciliter les calculs astronomiques. Par le Baron De-Zach. A Marseille de l'Imprimerie de Madame Mine, rue Coutellière. 1812, vol. 1 in-8.°

21 Mars 1812. Tavole di riduzione del trabucco in metri, e del miglio in miriametri, e viceversa, precedute da una idea generale sui pesi, e sulle misure per facilitare l' intelligenza, e l' uso delle Tavole di riduzione dei pesi, e delle misure metriche già in uso in Piemonte in pesi, e misure metriche, calcolate, e pubblicate da Giuseppe Castellano Professore della Scuola Teorico-Pratica dei nuovi pesi, e misure, Membro della Classe di Matematica. Torino 1809. Dalla Stamperia Sociale, vol. 1 in-8.° Castellano.

Tavole di riduzione delle emine in litri, e del litro in emine, vol. 1 in 8.°

Sull' epizoozia de' cavalli comparsa in Piemonte nel mese di settembre del 1811. Memoria utilissima alle persone dell' arte, ed ai proprietarj de' cavalli, composta da Francesco Toggia Professore di Veterinaria, e Membro di più Società letterarie. Torino presso la vedova Pomba, e figlj. (Brochure). Toggia.

Essai sur le tétanos rabien, ou recherches et reflexions sur la cause des accidens qui sont quelquefois la suite des morsures faites par Girard Correspondant de l'Académie.

les animaux dits enrâgés, suivies de quelques notions sur les moyens de prévenir, ou de guérir cette maladie. Par M. G. Girard, Docteur Médecin, Membre du ci-devant Collége Royal de Chirurgie, et de la Société de Médecine de Lyon, Correspondant de celle de Montpellier. A Lyon de l'Imprimerie de Ballanche père et fils, 1809. (Brochure) Avec trois numéros de la Gazette de Santé, ou Journal analytique qui donne une notice de l'opinion de l'Auteur sur la râge.

21 Mars 1812. Éloge de M.r Marc-Antoine Petit, Docteur en Médecine, ancien Chirurgien en chef de l'Hôtel-Dieu de Lyon, Membre de plusieurs Sociétés savantes, par M.r Cartier, ancien Chirurgien en chef de l'Hôtel-Dieu de Lyon, Docteur en Médecine, Membre de plusieurs Sociétés savantes, lu dans la Séance publique de l'Académie de Lyon le 3 septembre 1811. (Brochure). Cartier.

Éloge Historique de Guillaume de Batt, par B. Mojon M. D. Prof. d'Anatomie et de Physiologie à l'Académie Impériale de Gênes, Secrétaire de la Société médicale, etc. etc. Gênes chez Jean Gravier Imprimeur. (Brochure). Mojon Correspondant de l'Académie.

21 Mars 1812. Nivellement barometrique du Département du Gard. Extrait de la notice des travaux de l'Académie du Gard pendant l'année 1810. Par M. L. A. D'HOMBRES-FIRMAS, Membre de plusieurs Sociétés savantes. Nismes, de l'Imprimerie de P. Blachier-Belle 1811, (Brochure). — D'HOMBRES-FIRMAS Correspondant de l'Académie.

Giornale astrometeorologico per l'anno bisestile 1812. Prenoncia li principali fenomeni celesti secondo le recenti tavole, e le meteore secondo il *Saros*, o sia Ciclo di 223 lune, con cui circolano le stagioni, ec.; ad uso d'ogni classe di persone. Venezia da Francesco Andreola Stampatore. (Brochure). — MALACARNE Membre non-Résidant.

Programme pour le Concours de 1812 de l' — Académie des Sciences et Belles Lettres de Dijon.

Programme pour le Concours de 1812 de l' — Académie Eugéniane de Beaux-Arts de Carrare.

Programme pour le Concours de 1813 de la — Société pour l'encouragement de Beaux.Arts de Bruxelles.

Calendario Georgico per l' anno 1812. — Société d'Agriculture de Turin.

Delle malattie del grano in erba, di Matteo LOSANA Preposito di Santa Maria di Lombriasco, Professore emerito dell' Accademia dell' Università Imperiale, Membro della Società d' Agricoltura, Corrispondente dell' Accademia Imperiale delle Scienze di To- — LOSANA Correspondant de l'Académie.

rino, ec. ec. Carmagnola 1811, vol. 1 in-8.°

18 Avril. 1812. Le Jardin de S.t Sébastien, avec des notes sur quelques plantes nouvelles, ou peu connues. Par M.r De-Spin, Membre du Collége Electoral de Département, et du Conseil général du Département du Pô. Turin 1812 de l'Imprimerie Soffietti (Brochure avec deux planches) DE SPIN.

29 idem. Saggio sulle permutazioni della Italiana Orazione, di Luigi Muzzi, Capo d' uffizio della Segreteria generale dell' Istituto Reale di Scienze, Lettere, ed Arti. Milano (Destefanis) 1811, vol. 2 in-8.° MUZZI.

Dottrina Vaccinica in Dialoghi, compilata, e pubblicata per ordine del Signor Prefetto della Stura, dal Dottore Tommaso GENSANA Medico Saluzzese, Corrispondente dell' Imperiale Accademia delle Scienze di Torino, ec. Cuneo presso Pietro Rossi Stampatore, 1812. (Brochure). GENSANA Correspondant de l'Académie.

Néïla, ou les sermens, Histoire du 12.e Siècle, suivie d'Enguérand de Balco, anecdote du 13.e Siècle; et d'Hélène. Par Eusèbe SALVERTE. A Paris chez D. Colas Imprimeur Libraire, rue du vieux Colombier, n.° 26, 1012, vol. 2 in-8.° petit. SALVERTE Correspondant de l'Académie.

23 Mai 1812. Flora gallica, seu enumeratio plantarum in Gallia sponte nascentium. Auctore J. L. A. Loiseleur-Deslongchamps Doctore Medico Parisiensi. Lutetiæ ex Typis Mathæi Migneret 1806, 2 vol. in-8.° LOISELEUR DESLONGCHAMPS.

Notice sur les plantes à ajouter à la Flore de France (*Flora Gallica*) avec quelques corrections, et observations. Paris 1810, vol. 1 in-8.°

Recherches historiques, botaniques et médicales sur les Narcisses indigènes, pour servir à l'Histoire des plantes de France. Paris 1810 chez Badouin Imprimeur de l'Institut. (Brochure).

10 Juin. Mémoires sur les anciennes branches du Nil, et ses embouchures dans la Mer. Par M.r Dubois-Aymé, Membre de la Commission des Sciences, et des Arts d'Egypte, de l'Academie Italienne, de celles de Turin, des Géorgophiles de Florence, etc. etc., Directeur des Douanes de Livourne. 1812. (Brochure). DUBOIS-AYMÉ Correspondant de l'Académie.

Aperçu des résultats obtenus de la fabrication des sirops et des conserves de raisins, dans les cours des années 1810, et 1811 pour servir de suite aux traités publiés sur cette matière, avec une notice historique et chronologique du corps sucrant. Par A. A. Par- PARMENTIER Correspondant de l'Académie.

MENTIER, Officier de la Légion d'Honneur, et Membre de l'Institut Impérial de France, imprimé, et publié par ordre du Gouvèrnement. Paris de l'Imprimerie Impériale 1812, 1 vol. in-8.°

15 Juin 1812. Gnomonique analytique, ou solution par la seule analyse, de ce problème général: » trouver les intersections des cercles horaires avec une surface donnée » Mémoire présenté et lu dans le mois de mars 1810 à l'Académie des Sciences, Belles Lettres, et Arts de Lyon. Par M.r J. MOLLET, Membre de la même Académie. Lyon de l'Imprimerie Ballanche 1812. (Brochure) MOLLET.

Hydraulique Physique, ou connaissance des Phénomènes que présentent les fluides, soit dans l'état de repos soit dans celui de mouvement. Ouvrage élémentaire renfermant l'hydrostatique et l'hydrodinamique (feuilleton d'annonce).

19 idem. Esame critico del primo viaggio di Americo Vespucci al nuovo mondo, con una Dissertazione intorno al manoscritto del Libro *De imitatione Christi*, detto il Codice d' Arona ec. Opuscoli pubblicati nelle Memorie dell' Accademia Imperiale delle Scienze di Torino, e ristampati per servire di nuove aggiunte al contenuto nel Libro intitolato = NAPIONE Académicien.

Della Patria di Colombo, stampato in Firenze presso Molini, e Landi 1811, 1 vol. in-8.°

6 Juillet 1812. Memorie della Società d'Agricoltura di Torino. Tomo IX. Torino 1812 presso Felice Galletti. 1 vol. in-8°. Società di Agricoltura di Torino.

Osservazioni sull' uso del Salasso, di Anselmo PRATO, Medico astante nell' Ospedale maggiore di Milano. Milano dalla Tipografia di G. Pirotto 1812, 1 vol. in-8.° PRATO.

Esperienze, e riflessioni sopra la carie dei denti umani, coll' aggiunta di un nuovo saggio su la riproduzione dei denti negli animali rosicanti, di Francesco LAVAGNA giuniore, Dottore in medicina, dell' Imperiale Accademia di Genova, e Membro della Società Italiana delle Scienze, Lettere, e Belle Arti. Genova 1812, dalla Stamperia di Giacinto Bonaudo, 1 vol. in-8.° LAVAGNA.

Traité sur la Polysarcie, par M.r Ange MACCARY, natif de Campo-Rosso, Département des Alpes maritimes, Docteur en Médecine et en Chirurgie, Ex-Médecin de l'Hospice de la Cabella, Membre Correspondant de la Société de Médecine pratique de Montpellier, d'Émulation médicale de Paris, et de celle de Padoue, etc. 1811. MACCARY.

6 Juillet 1812. Essai analytique contre la nature syphilitique de la gonorrhée dite virulente, ouvrage couronné en 1810 par J. F. HERNANDEZ, Ex-Membre du Corps Législatif, et du Conseil général du Département du Var, second Médecin en chef de la marine, Membre de plusieurs Sociétés savantes. Toulon chez l'Auteur, place derrière le Palais n.° 28, 1812. HERNANDEZ.

15 Idem. Conti fatti, ossieno Tavole di rapporto fra la moneta di Genova in circolazione negli Stati dell' antica Liguria, e la moneta decimale dell' Impero, conformemente al Decreto Imperiale dei 15 novembre 1810. Opera di G. Chianale, Capitano del Genio, Membro della Commissione dei pesi, e misure del Dipartimento di Genova, 1811 dalla Stamperia Giossi, 1 vol. in 16. CHIANALE Correspondant de l'Académie.

Précis d'un voyage botanique fait en Suisse dans les Grisons, aux sources du Rhin, au S.t Goutard, dans les Départemens du Tesin, le Milanais, le Piémont; autour le Lac majeur, sur le Simplon, au Valais, etc., en juillet, août, et septembre 1811. Précédé de quelques reflexions sur l'utilité des voyages pour les Naturalistes. Par D. VILLARS, Professeur de Botanique, G. LAUTH, et A. NESLER (avec quatre planches représen- VILLARS, LAUTH, et NESLER.

tant des plantes nouvelles. A Paris chez Lenormand Libraire, rue de Seine, n.° 8, 1812 (Brochure).

15 Juillet 1821. Tableaux comparatifs des anciennes mesures du Département de Gênes, avec les mesures prémétriques de l'Empire, et vice-versa, précédés d'une instruction qui rendra très-facile l'usage de ces Tableanx. Ouvrage rédigé par la Commission des poids et mesures de ce Département. Gênes 1811, Imprimerie de la Marine, 1 vol. in-4.° Commission des poids, et mesures du Département de Gênes.

16 Novembre. Mémoires de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Institut Impérial de France. Année 1810, 1.re partie. Paris, Firmin Didot Imprimeur de l'Institut de France, et Graveur de l'Imprimerie Impériale, rue Jacob, n.° 24, 1811, 1 vol. in-4.° Institut impérial de France.

Elencus clarissimorum Professorum Academiæ Taurinensis, et rerum quas docebunt. Item ordo scholarum anno scholastico 1813. Typis excussus a Vincentio Bianco in Aedibus Academiæ. (Brochure). De Balbe Académicien

Per le solenni esequie di Francesco Regis, celebrate in S. Francesco di Paola il dì 24 di dicembre 1811. Orazione di Carlo Busseron Dottore in Teologia, ed in Leggi, Professore nel Liceo di Torino. Succedono le inscrizioni latine collocate alla porta della

Chiesa, composte da Giuseppe VERNAZZA di FRENEY. Torino nel Palazzo dell' Accademia per Vincenzo Bianco, 1812. (Brochure)

Clarissimi Benedicti BONVICINI Chimiae pharmaceuticae Professoris, Medicae facultatis Praesidis Laudatio ab Alexandro GARMAGNANO latinae litteraturae Professore habita in Æde Sancti Francisci a Paula die XIIII martii, anno 1812, coram universa Taurinensi Academia ejusque amplissimo Rectore Prospero BALBO, Caesareae studiorum Universitatis a consiliis, totius rei litterariae Inspectore, majoribus caesareis adjunctarum imperio urbium insignibus decorato. Accedit inscriptio temporaria Aedis foribus affixa, Auctore Josepho VERNAZZA de FRENEY. Augustae Taurin., in Aedibus Academiae, Typographo Vincentio Bianco 1812. (Brochure)

16 Novembre 1812. Thomae Valpergae, Epistola Horatii ad Augustum in morte Maecenatis muneri cum aliis literis missa ad amplissimum virum Ludovicum De-Breme equitem insignis Coronae Ferreae Imperatori in Regno Italico a stipe distribuenda, Praefectum sacris aulicis, institutionique epheborum, etc. (Brochure). — VALPERGA DE CALUSO Académicien.

16 Novembre 1812. Annales de l'Observatoire de l'Académie de Turin, avec des notices statistiques concernant l'agriculture, et la médecine, par le Professeur VASSALLI-EANDI. 1811, premier semestre. Turin de l'Imprimerie Appiano. 1 vol. in-4.° — BALBE Académicien.

Histoire Littéraire d'Italie, par P. L. GINGUENÉ, de l'Institut Impérial de France, Membre non résidant de l'Académie Impériale de Turin, associé correspondant de celle de la Crusca, des Athénées de Niort et Vaucluse, Membre de l'Académie Celtique, etc. A Paris chez Michaud frères Imprimeurs Libraires, rue des Bons-Enfans, n.° 34, 1812, 2. vol. in-8.° (Tomes 5 et 6). — GINGUENÉ Académicien non-Résidant.

Exposition des faits recueillis jusqu'à présent concernant les effets de la vaccination, et examen des objections qu'on a faites en différens tems, et que quelques personnes ont encore contre cette pratique. Lu à la Classe des Sciences physiques et mathématique de l'Institut Impérial de France. Par MM. BERTHOLLET, PEREY, et HALLÉ rapporteurs. (Brochure). — Institut Impérial de France.

Il Como. Favola Boschereccia di Giovanni MILTON, rappresentata nel Castello di Ludlow nell' anno MDCXXXIV alla presenza del Conte di Bridgewater Presidente del Paese di Galles,

tradotta in italiano da Gaetano POLIDORI da Bientina. Terza edizione migliorata, e corretta. Parigi da' Torchi di Firmin Didot Tipografo dell' Instituto Imperiale MDCCCXII.

16 Novembre 1812. Système universel par H. AZAÏS Inspecteur de la Librairie, et Imprimerie à Paris. Leblanc Imprimeur-Libraire, Abbaye S. Germain des Prés, 8 vol. in-8.° AZAÏS.

Enología, ovvero l'arte di fare, conservare, e far viaggiare i vini del Regno d'Italia, del Senatore Conte Vincenzo DANDOLO, Commendatore dell' Ordine della Corona di Ferro, Cavaliere della Legion d'onore, Membro dell' Istituto Reale, uno dei quaranta della Società Italiana delle Scienze, e Socio di molte Accademie nazionali, e straniere. Parte 1.ª e Parte 2.da Milano per Giovanni Silvestri, 1812, 2 vol. in-8.° DANDOLO Correspondant de l'Académie.

Traité sur la Polysarcie, par Monsieur Ange MACCARY, natif de Campo-Rosso, Département des Alpes maritimes; Docteur en médecine et en chirurgie, Membre correspondant de la Société de médecine pratique de Montpellier, de Marseille, d'Emulation médicale de Paris, d'Instruction médicale de la même ville, de celle de Padoue, etc. 1811, 1 vol. in-8.° MACCARY.

16 Novembre 1812. Mûriers et vers à soie, par Joseph Ignace Ghiliossi de Lemie, Président du Tribunal Civil séant à Coni, Membre du Conseil général du Département de la Sture, de la Société d'Agriculture, Sciences, Arts, et Commerce de ladite Ville, de celle d'Agriculture, et Correspondant de l'Academie Impériale de Turin, etc. Coni chez Pierre Rossi Imprimeur de la Préfecture, 1812, 1 vol. in-8.° Ghiliossi Correspondant de l'Académie.

Choix des moyens propres à soulever les navires submergés dans les lieux sujets au flux, et au reflux; recueillis dans les Mémoires envoyés au concours ouvert par la Société des Sciences, Belles Lettres et Arts de Bordeaux. A Bordeaux chez Pinard Imprimeur, rue des Lauriers, n.° 7. (Broch.) Société des Sciences, Belles Lettres et Arts de Bordeaux.

Observations relatives à la ligature du cordon ombilical; présentées à S. E. le Ministre de l'Intérieur, et approuvées par la faculté de Médecine de Paris. Par M. G. Girard, Docteur Médecin, Membre du ci-devant Collége Royal de Chirurgie, et de la faculté de Médecine de Lyon, Correspondant de la Société de Médecine pratique de Montpellier, de celles de Bordeaux, Bruxelles et Lyon. Imprimerie de Ballanche 1812. (Brochure). Girard Correspondant de l'Académie.

16 Novembre 1812. Storia del Tifo contagioso, che regnò endemico nelle carceri di Vicenza al fine del 1811, e principio del 1812, del Dottore Domenico THIENE. Vicenza 1812, Tipografia Paroni. (Brochure). THIENE.

Éloge de Goffin, ou les mines de Beaujone, par M.r MOLLEVAULT, Correspondant de la Classe d'Histoire, et de Littérature ancienne, de l'Institut Impérial de France. Séance publique du 10 septembre 1812. (Brochure). MOLLEVAULT.

Éloge en vers d'Hubert Goffin. Par M.r DE-ROUVE-DE-SAVI, des Académies de Marseille et de Montpellier, de la Société Académique des Sciences de Paris, de l'Académie Impériale de Turin, et autres Sociétés Savantes. A Paris, de l'Imprimerie de Cussac, rue d'Orléans, 1812, (Brochure). ROUVE-DE-SAVI Correspondant de l'Académie.

Rapport sur le Creptal pesant destiné à la fabrication des Lunettes achromatiques, présenté à l'Institut par M.r DUFOURCERAIS, Manufacturier de S. M. l'Empereur et Roi, fait à la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, dans la Séance de lundi 10 avril 1809. (Brochure). DUFOURCERAIS Correspondant de l'Académie.

Rapport fait à la Société d'Agriculture du Département de la Seine par M.r le Baron PETIT-DE-BEAUVERGER dans sa Séance du 2 octobre 1811. Société d'Agriculture du Département de la Seine.

Rapport sur les travaux de la Société du Département de la Seine, par M.r SILVESTRE, Secrétaire perpétuel de la Société, Membre de l'Institut Impérial, etc.

Programme de la Séance publique de la Société du Département de la Seine, du dimanche 6 septembre 1812.

Programme d'un concours pour des notices biographiques sur les hommes qui méritent d'être connus pour les services qu'ils ont rendus à l'agriculture dans les diverses parties de l'Empire Français, proposé par la Société d' Agriculture du Département de la Seine, à la Séance publique du 6 septembre 1812.

Programme d'un concours annuel pour la culture dans les jachères, des racines, et plantes améliorantes.

Programme d'un concours pour les propriétés rurales, les mieux dirigées.

16 Novembre 1812. Rapport fait à la Société d'Agriculture du Département de la Seine, Séance du 15 juillet 1812, par MM. TESSIER, et Modeste PAROLETTI rapporteurs, sur le traité des maladies du bled, publié en italien par M.r l'Abbé LOSANA, Curé de S.te Marie de Lombriasco, Membre de plusieurs Sociétés savantes, etc. A Paris de l'Imprimerie de PAROLETTI Académicien.

Mad.ᵉ Huzard, rue de l'Epéron S.ᵗ André des Arts, n.° 7, 1812 (Brochure).

16 Novembre 1812. Notice sur la troisième exposition publique des productions des Arts du Département de Calvados en 1811. Par P. A. LAIR, Sécrétaire de la Société d'Agriculture, et de Commerce de Caën. Caën de l'Imprimerie de F. Poisson. (Brochure). LAIR.

Prospectus à l'Histoire naturelle d'Auvergne et des Départemens environnans. Par LACOSTE (de Plaisance), Professeur des Sciences Physiques au Lycée de Clermond-Ferrand, Membre de plusieurs Académies, etc. (Feuilleton). LACOSTE (de Plaissance) Correspondant de l'Académie.

Aggiunte, e correzioni al Libro della Raddomanzia. Ch. AMORETTI Membre non-Résidant. de l'Académie.

Discorsi letti nella grande aula del Palazzo Reale delle Scienze, e Belle Arti in Milano, in occasione della solenne distribuzione de' premj della Reale Accademia delle Belle Arti, fattasi da S. E. il signor Conte Ministro dell' Interno, il giorno 11 agosto 1812. Milano dalla Stamperia Reale 1812. (Brochure).

Programme des prix proposés par l'Académie des Sciences, Belle Lettres, et Arts de Lyon. (Feuilleton). Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Lyon.

16 Novembre 1812. Trattato d'Agricoltura del Medico Gioanni Biroli. Novara 1812, vol. 3.°, e 4.° — Biroli Correspondant de l'Académie.

Compte rendu des travaux de la Société d'Agriculture, Histoire naturelle, et Arts utiles de Lyon, depuis le 4 décembre 1811 jusqu'au 9 septembre 1812. Par L. F. Grognier, Professeur à l'Ecole Impériale vétérinaire de Lyon, Secrétaire adjoint. A Lyon de l'Imprimerie de Pezzin, n.° 43, 1812. (Brochure). — Grognier.

Le Contrazioni. Poemetto in due Canti di Gioanni Agostino Florio, già Professore di Filosofia nella Università di Torino, e Membro del Collegio di Lettere dell' Accademia della stessa Città. Torino 1812, coi Tipi di Vincenzo Bianco. (Brochure). — Florio.

30 idem. Description du plan incliné souterrain exécuté par François Egerton Duc de Bridgewater entre le bief inférieur de son canal souterrain, dans ses mines de charbon de terre de Valkden-Moor, dans le Lancaskire. Par le très-honorable François Henri Egerton, etc. etc. A Paris au Bureau des annales des Arts, et Manufactures 1812. (Brochure). — Egerton.

Programme de la Société des Sciences, Belles Lettres et Arts de Bordeaux. Séance publique du 27 août 1812. — Société des Sciences de Boreaux.

30 Novembre 1812. Programme des prix par l'Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Lyon. — Académie des Sciences, Belles Lettres, et Arts de Lyon.

Annonce de quelques découvertes en Géomètrie. — ROSSI-AMATIS.

Gravure représentant un Enneadécagone magique, avec des feuilles de papier colorié et différemment découpées, le tout accompagné d'une instruction imprimée en différentes langues, et servant à l'explication de plusieurs propriétés de la figure susdite et des applications qu'on en peut faire à l'arithmétique, à la mécanique, etc. — PAROLETTI Académicien.

Mémoire pour servir de parallèle entre le chapelet et la chaîne aspirante. (Brochure). — CASTELLANO.

Réfutation de la théorie des fonctions analytiques. — HOENÉ WRONSKI.

2 Décembre 1812. Wilna liberata. Poemetto. Torino 1812, coi Tipi di Vincenzo Bianco. — MARENCO Académicien.

14 idem. Le Maïs, ou Blé de Turquie apprécié sous tous ses rappports; Mémoire couronné le 25 août 1784 par l'Académie Royale des Sciences, Belles Lettres et Arts de Bordeaux. Par A. A. PARMENTIER, Officier de la Légion d'Honneur, et Membre de l'Institut Impérial de France. Nouvelle édition, revue, et corrigée. Imprimé et publié par ordre du Gouvernement. A Paris de l'Imprimerie Impériale 1812, 1 vol. in-8.° — PARMENTIER Correspondant de l'Académie.

14 Décembre 1812. Prospectus = Giornale di medicina pratica, compilato da Valeriano Luigi BRERA, Membro di varie Accademie, etc. per l' anno 1813. BRERA.

30 idem. Observation sur l' amputation faite à un enfant de cinq mois du doigt annulaire de la main droite, ayant la forme et les dimensions du gros orteil d'un adulte, suivie de quelques remarques sur l'influence de l'imagination de la femme grosse sur le fœtus renfermé dans son sein, avec une planche en taille douce, par J. M. SCAVINI de Saluces (Sture), Chirurgien major de la Garde d'Honneur de S. A. I. le Prince Gouverneur général, Professeur de clinique externe à la faculté de médecine, et Adjcint à l'Ecole de pharmacie de l'Academie de Turin; Membre du Jury médical du Département du Pô, et de la Société de médecine de Lyon, etc. Turin 1812, Imprimerie Appiano, n.° 49. SCAVINI.

RAPPORT

FAIT PAR MM. ROSSI ET BALBIS

SUR

UN FŒTUS MONSTRUEUX

ENVOYÉ PAR M.r LE DOCTEUR GRANDI

CHIRURGIEN A CARMAGNOLE.

Lu dans la Séance du 24 Mai 1813.

Chargés par M.r le Directeur de la Classe d'examiner le cadavre d'un enfant mâle qui a été présenté par M.r le Collégue Carena Secrétaire adjoint, de la part de M.r le Docteur Grandi de Carmagnole, nous nous empressons de communiquer à la Compagnie les résultats de cet examen; le Docteur Crosetti, prosecteur de l'Académie, et anatomiste, très-distingué a bien voulu nous aider dans la dissection de ce cadavre.

Détails de l'Extérieur

1.° Ce cadavre présentait le corps d'un nouveau-né à terme; savoir toutes ses parties extérieures étaient bien développées, et bien conformées, à l'exception de la tête.

2.° La partie supérieure de la tête était si écrasée de derrière en avant, qu'elle paraissait manquer. Les côtés dans l'état naturel. La partie supérieure du front au-dessus des sourcils manquait; la partie inférieure était complète, et dans l'ordre naturel.

3.° La main gauche et ses doigts étaient renversés sur l'avant-bras, et le pied gauche et ses doigts sur la jambe; l'une et l'autre étaient aplatis: On ne pouvait obtenir qu'avec force quelque léger mouvement du poignet et du pied: leurs doigts étaient susceptibles de leurs mouvemens.

4.° Vers le milieu de la région occipitale, qui était écrasée, et presque perpendiculairement à la colonne vertébrale il y avait une tumeur molle, de la grosseur d'un petit œuf de poule, couverte par les tégumens parsemés de quelques cheveux. Dans tout le reste ce cadavre était bien conformé.

DISSECTION.

Détails des parties molles.

Ayant ouvert la tumeur il en est sorti une substance tout-à-fait analogue à la substance corticale du cerveau; elle se prolongeait dans l'intérieur par un pédicule; Les parois de la tumeur étaient faites par les tégumens, et par un double prolongement de la *dure mère* qui sortait de la cavité à travers une ouverture

ayant la capacité à recevoir le petit doigt. Les os de la tête n'étaient point pliables, comme il est ordinairement à cet âge.

Nous cherchames d'ouvrir la cavité du crâne de derrière en avant en suivant la suture sagittale et en partant de l'ouverture susdite, mais une forte résistance nous obligea de diriger le tranchant à la gauche, nous parvinmes alors dans une cavité: Nous essayames de le diriger du côté droit, mais il ne fut pas possible de vaincre les resistances qui s'y opposaient aussi. Nous retirames le tranchant, et après avoir examiné l'extérieur de ce côté, nous découvrimes que l'endroit opposé à celui de la tumeur nous aurait permis d'y entrer; En effet nous penétrames dans une cavité analogue à la cavité gauche. Ces deux cavités étaient séparées l'une de l'autre par une cloison osseuse; Elles étaient parsemées de petits grains d'une couleur blanchâtre, composés d'une substance tout-à-fait analogue à la substance médullaire du cerveau, il n'y avait aucun indice des hémisphères du cerveau, ni de ceux du cervelet. Chacune d'elles était tapissée par la *dure* et la *pie mère*

Tout près du trou occipital il y avait un tubercule gros comme une petite noisette, de chaque côté duquel sortaient les nerfs cérébraux, et en bas la moelle épinière.

Ce tubercule était couvert par des prolongemens de la *pie mère* qui venaient de l'une et de l'autre cavité et se réunissaient pour en former une seule: il était composé de deux substances cérébrales comme à l'ordinaire;

la corticale était formée par le pédicule venant de la tumeur. Nous n'avons pu découvrir dans l'intérieur de ce tubercule des indices du corps calleux, ni d'aucune autre partie de celles qui ont été décrites par les Anatomistes, dans le cerveau.

Les nerfs de l'un et de l'autre côté après avoir parcouru le plan de la cavité du côté correspondant, ils en sortaient par ses propres trous pour se distribuer aux parties, suivant l'ordre naturel. La moelle épinière, était comme à l'ordinaire. Ce n'était qu'à l'endroit du tubercule que les deux cavités de ce crâne communiquaient entr'elles.

La *dure mère* de l'une et de l'autre cavité, et celle venant de la tumeur se réunissaient ensemble aux environs du trou occipital. Il n'y avait point de sinus longitudinaux supérieurs : Les sinus latéraux existaient comme à l'ordinaire, mais beaucoup plus petits, et ils ne communiquaient point entr'eux.

Chaque carotide interne envoyait des rameaux aux grains cérébraux à la *dure* et à la *pie mère* de son côté; Un rameau assez gros de chacune allait s'anastomoser avec l'artère vertébrale de son côté, et de ces anastomoses partaient les artères qui se distribuaient au tubercule et à la tumeur.

Les parties molles appartenantes aux articulations du poignet et du pied gauche, ainsi que les muscles destinés à leurs mouvemens étaient dans l'état naturel. Dans chacune des articulations était répandue une hu-

meur de couleur jaunâtre et épaisse, et elles étaient anchylosées: toutes les autres parties étaient dans l'état ordinaire. Celui des poumons, du cœur, et du conduit artériel prouvait que cet individu avait respiré.

Détails des parties dures.

L'os coronal manquait à sa partie supérieure au-dessus des bosses frontales. Le reste était complet. Le degré d'ossification de cet os était pour le moins égal à celui d'un enfant de trois mois, il résistait même à la scie presqu'autant que celui d'un adulte.

Les os pariétaux conservaient leur figure quarrée, mais ils n'avaient qu'environ un cinquième du diamètre ordinaire à cette époque de la vie; ils étaient placés un de chaque côté d'un prolongement de l'os occipital qui allait se joindre à l'os coronal sans y être articulés; leur solidité était analogue à celle de l'os coronal.

L'occipital était écrasé de derrière en avant ayant perdu presqu'entièrement sa convexité: Il s'avançait jusqu'à l'os coronal par un prolongement ayant une figure pyramidale avec sa base postérieure: les bords latéraux supérieurs de cet os manquaient. Du côté gauche de ce prolongement, et sur la ligne même du trou occipital était placée la tumeur, qui communiquait avec le tubercule. Le trou de communication pouvait être regardé comme la fontanelle supérieure. La même fontanelle existait aussi du côté droit de ce prolongement osseux.

L'apophyse basilaire de cet os se prolongeait en avant jusqu'à l'os ethmoïde. Le corps du sphenoïde manquait; l'apophyse basilaire était unie supérieurement au prolongement pyramidal, et toutes les deux à la crête de coq et à l'épine coronale; de cette réunion résultait la cloison osseuse qui séparait la cavité du crâne en deux cavités communiquantes entr'elles seulement à la région du trou occipital, et là où logeait le tubercule. Cet os était très-dur, il résistait dans les différentes régions à la scie.

Les parties latérales du sphénoïde étaient complètes ainsi que l'os ethmoïde, et les os temporaux, mais ils avaient tous un plus haut degré de solidité qu'il n'est ordinaire à cet âge.

Le nombre, la figure, et le siège des os du carpe et du tarse, ainsi que de tous les autres os, étaient dans l'ordre naturel.

Conclusion.

Nous sommes d'avis que le vice de conformation de la tête de ce cadavre n'est point dû à des causes simples, telles que la frayeur subite de la femme qui le portait: que ce n'était pas non plus un germe originellement monstrueux; mais qu'il est devenu tel dans la progression de son accroissement, attendu que des causes physiques se sont opposées au développement complet et régulier des parties de la tête dont il a été fait mention. A l'appui de notre opinion viennent le plus haut degré d'ossification des os du crâne, la position de la main et du pied gauche,

et l'anchylose de ces articulations; savoir que ces différentes parties dont nous venons de parler, et particulièrement la tête, sont restées dans un état d'immobilité, et appuyées contre des parties solides de la mère. Nous voulons bien accorder qu'une frayeur subite puisse déterminer dans une femme enceinte des dérangemens dans la matrice qui influent, à leur tour, sur le fœtus contenu, puisque par une pareille cause il peut en résulter l'avortement: mais nous n'admettons point de telles altérations provenantes de seules causes morales, et à plus forte raison, s'il s'agit d'addition de parties (*a*).

Les détails de cette dissection étant d'ailleurs utiles à l'avancement des connaissances physiologiques, attendu qu'il ne résulte point d'entrecroisement des nerfs optiques, et que les nerfs cérébraux ainsi que la moelle épinière tiraient leur origine d'un seul point, tandis que le cerveau et le cervelet manquaient presqu'entièrement, et que dans le tubercule il ne nous a point été possible de découvrir le corps calleux, ni aucune trace de ces parties du cerveau décrites par les Anatomistes; nous croyons qu'ils peuvent mériter d'être insérés dans les Mémoires de la Classe.

ROSSI *Commissaire-Rapporteur.*
BALBIS *Commissaire.*

(*a*) Il aurait été très-utile de savoir:
1. Si la femme qui a accouché de cet enfant était bien conformée.
2. Si elle était primipare
3. Quelle est l'époque de la grossesse à laquelle a eu lieu la frayeur qu'elle accuse pour cause des défauts du nouveau-né.
4. Quels furent les changemens qui en sont résultés dans les mouvemens du fœtus.

MÉMOIRE

SUR LA CAUSE DES RICOCHETS QUE FONT LES PIERRES ET LES BOULETS DE CANON, LANCÉS OBLIQUEMENT SUR LA SURFACE DE L'EAU.

PAR GEORGES BIDONE.

Lu dans la Séance du 16 Février 1811.

L'INTÉRÊT avec lequel on se plait à observer le phénomène qui fait l'objet de ce Mémoire, suffirait seul pour nous exciter à en connaître la cause ; si le desir de contribuer à l'avancement de la physique n'y ajoutait des motifs plus puissans encore: Aussi des Géomètres et des Physiciens du premier ordre ont-ils cherché à la découvrir. Mais les différentes causes qu'ils ont successivement imaginées, ne paraissent pas répondre à l'ensemble des circonstances qui accompagnent ce phénomène singulier, ni fixer d'une manière précise les limites, au-delà desquelles il cesse d'avoir lieu. Ce sont ces considérations qui m'ont engagé à discuter cette question. A tel effet je commence par développer

les principes, d'où dépend la théorie des ricochets, faits à la surface de l'eau par des corps solides. L'explication qui en découle, embrasse toutes les circonstances, et fait ressortir les conditions essentielles à les produire.

A ce phénomène il s'en rattache d'autres, que l'observation journalière nous présente continuellement, tels que le rejaillissement des liquides, causé par la chute des corps solides sur leur surface, et la réflexion des gouttes qui tombent sur des liquides. Les explications sont confirmées à leur tour par des expériences, que je rapporte. Après avoir ainsi exposé la partie physique, j'en soumets les principes au calcul, pour avoir les limites des divers élémens, qui produisent par leur concours le ricochet; et afin d'en rendre plus évident l'accord avec l'observation, j'applique les formules générales à des exemples numériques. Je discute également, à l'aide du calcul, les expériences rapportées; et il résulte, que leur théorie, ainsi que celle des ricochets faits à la surface de l'eau, rentre entièrement dans celle des armes à feu. Enfin, je termine le Mémoire par des considérations générales sur les explications qu'on a données jusqu'à présent, des phénomènes dont il s'agit.

Principes desquels dépend l'explication des ricochets qui se font à la surface de l'eau.

1. LORSQU'UN *corps se meut dans l'atmosphère avec une vîtesse plus grande que celle que prendrait l'air, s'il se précipitait tout-à-coup dans le vide; il se forme en contiguïté de sa surface postérieure un vide parfait. Si la vîtesse du corps est moindre que celle de l'air dans le vide, alors ce fluide occupe continuellement, avec une vîtesse égale à celle du corps, l'espace que celui-ci abandonne.*

Dans le premier cas, si le corps s'arrête ou perd brusquement une partie finie de son mouvement, de manière que sa vîtesse restante soit moindre que celle de l'air dans le vide; le corps est frappé par ce fluide avec toute la vîtesse qu'il prend dans le vide: Dans le second cas, l'air frappe le corps avec l'excès de sa vîtesse sur celle que conserve encore le corps.

Lorsqu'un corps quelconque tombe, à travers de l'atmosphère, sur la surface d'un liquide, il attrape et comprime entre sa surface et celle du liquide, une couche d'air plus ou moins considérable.

Les premiers de ces principes sont assez clairs par eux-mêmes, et généralement admis par les Auteurs qui traitent du mouvement des projectiles dans l'at-

mosphère. Le dernier devient également évident, si l'on fait attention à l'adhérence de l'air à la surface de tous les corps. Ce fait, sur lequel sont généralement d'accord les Physiciens (*a*), a été prouvé par un grand nombre d'expériences par le Médecin Petit (*b*). Cette enveloppe d'air, et la force de son adhésion aux différentes substances, soit solides, soit liquides, sont plus ou moins considérables, suivant la nature des corps et suivant les circonstances de leur surface. Mais il est constaté, que cette adhérence est souvent assez puissante pour résister à la force expansive de l'air, mise en activité par la raréfaction faite sous la machine pneumatique, aussi bien qu'aux fortes pressions exercées sur la surface des corps par le moyen des liquides.

L'observation de tous les jours démontre qu'un corps qui tombe avec une certaine vîtesse, excite, à l'endroit de sa chute, un vent qui chasse et emporte tout-à-l'entour les grains de poussière qui peuvent s'y trouver; et il est aisé de se convaincre que ce vent n'est pas seulement produit par l'air qui suit le corps, mais qu'il l'est principalement par la couche de ce fluide qui est attrapée et comprimée entre les deux surfaces, et qui s'échappe au moment du choc. Il suffit, pour rendre ce phénomène plus

---

(*a*) Musschenbroëk. Cours de Physique, article 1030. Vassalli-Eandi, Physicae experimentalis lineamenta ad Subalpinos, de aëre, articulo 5.°. Traité élémentaire de Physique par M. Haüy, 2.de édition, tom. 1, pag. 239 etc.

(*b*) Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1731.

sensible, d'augmenter l'étendue et le parallélisme des deux surfaces, et de répandre de légers corpuscules à l'endroit de la chute. L'expérience très-connue, par laquelle on voit qu'un cylindre d'acier très-délié flotte sur la surface de l'eau en vertu de la couche aërienne qui l'enveloppe, prouve que l'épaisseur de cette couche est plus grande que $0^{\text{millimètr.}},684$, en supposant le rayon du cylindre de $0^{\text{millimètr.}},38$ (*a*).

Une semblable couche d'air, plus ou moins épaisse, peut être censée adhérente à la surface des autres corps, et des liquides mêmes; ce qui double l'épaisseur de la couche aërienne attrapée entre les deux surfaces qui viennent à se choquer. Si donc un corps tombe avec vîtesse sur un liquide, il ne paraît pas douteux, en combinant la propriété qu'a le liquide de céder au choc, avec la compressibilité et l'adhérence de l'air, il ne paraît pas douteux, dis-je, qu'au moment du choc il attrapera entre sa surface et celle du liquide une couche d'air, qui sera bientôt enveloppée par le liquide environnant, avant qu'elle puisse se dégager de dessous le corps. La vérité de ce fait se confirmera davantage encore par les phénomènes mêmes qu'il servira à expliquer. Nous allons maintenant voir comment de la considération des principes précédens on déduit l'explication la

---

(*a*) On parvient à ce résultat, en supposant de plus que les poids spécifiques du cylindre, de l'eau et de l'air, soient représentés respectivement par les nombres 6266, 4; 800, 1.

plus naturelle et la plus complète des ricochets à la surface de l'eau, et de beaucoup d'autres phénomènes analogues.

2. Soit un corps ou *mobile* M (*fig.* 1.ère) de figure sphérique, qui après avoir parcouru dans l'atmosphère l'espace AM, rencontre obliquement en C la surface horizontale OS d'une eau dormante : à ce point, le corps, par les lois de la réfraction, commencera à s'écarter de sa direction, en s'éloignant de la perpendiculaire, et perdant en très-peu de temps une partie finie de sa vîtesse. Ainsi au lieu de la ligne MB, il prendra la route MKM′ avec un mouvement retardé. Or, si au moment que le corps frappe la surface de l'eau, sa vîtesse est moindre que celle que prendrait l'air dans le vide ; il est visible que ce fluide (*a*) suivra de près le mobile avec une égale vîtesse, et se précipitera derrière lui dans l'eau pour occuper à l'instant la place qu'il abandonne.

Pareillement, si la vîtesse du corps au moment qu'il frappe l'eau, est plus grande que celle de l'air dans le vide ; il est facile de s'assurer (comme on le verra plus bas) que la vîtesse de l'air, qui tendra alors à remplir le vide laissé par le mobile, sera assez forte, pour que l'air puisse arriver à occuper l'entonnoir qui se

---

(*a*) Nous désignons ici par le mot *fluide*, l'air atmosphérique et les autres substances qui ont les mêmes propriétés mécaniques ; et par celui de *liquide*, les substances telles que l'eau, le mercure etc.

forme dans lé liquide derrière le corps, dont la vîtesse est tout-à-coup retardée, avant que les lames d'eau, qui s'élèvent tout-à-l'entour, viennent à retomber.

Ainsi dans tous les cas, dès que le mobile par son arrivée à la surface de l'eau, est forcé, par la résistance de ce liquide, de changer subitement de direction et de perdre une quantité finie de son mouvement, l'air qui le suit, s'enfonce également dans l'eau, et se précipite, en vertu de la vîtesse dont il est doué, dans le creux, ouvert sur le liquide par le corps, qui le précède. La manière dont l'air se jette dans ce creux, mérite une attention particulière, par son importance pour l'explication du phénomène. Tant que le mobile a dans l'atmosphère un mouvement soumis aux lois de la continuité, l'air qui le suit, prend instantanément la même direction. Mais, dès que le corps éprouve, en frappant le liquide, un changement brusque de direction; cet air, en vertu de l'inertie, conserve encore, dans les premiers instants, sa direction primitive; circonstance qui le porte à suivre une route moins réfractée que celle du corps, et à creuser davantage l'entonnoir liquide. Maintenant le mobile continuant à se mouvoir, et à s'écarter de plus en plus de sa direction, à mesure que de nouvelles parties de sa surface pénètrent dans l'eau; l'air, toujours actif, le suit encore, et en le prenant par-dessous, il s'insinue entre le liquide, et la surface inférieure du corps, qu'il enveloppe plus ou moins complétement, selon les circonstances, d'où dépendent tous ces mouvemens.

Ce que nous venons de dire, est analogue à la manière, dont les vents soulèvent de la surface de la terre, et emportent des corps même très-lourds, qui se trouvent sur leur passage. Ainsi lorsque le corps sera parvenu à un point M', l'air occupera un espace postérieur et contigu, tel que XYZ. Mais pendant que le mobile s'avance dans l'eau, suivi par l'air, les lames du liquide qui avaient été élevées au-dessus de leur horizon, retombent pour se remettre de niveau : par-là elles empêchent l'air de s'échapper latéralement, et en conservent la direction, ainsi que la densité, qui est dûe, dans les premiers instans, à la vîtesse avec laquelle il s'est enfoncé dans le liquide.

3. Nous n'avons considéré dans ce qui précède, que l'air qui suit le mobile, et qui s'enfonce après lui dans l'eau. Pour embrasser tout ce qui a vraiment lieu dans la nature, considérons aussi la couche d'air attrapée entre les surfaces du corps et du liquide. On peut concevoir que cette couche, pendant que le mobile parvient de M en M', se comporte de la manière suivante. Dès que le corps frappe la surface de l'eau, l'air adhérent aux deux surfaces en contact, est fortement comprimé, et enveloppé par le liquide pour toute la partie submergée du corps. Dès que cette compression, produite par le choc du corps et par la résistance du liquide, est assez forte pour forcer l'air compris entre les deux surfaces, à déployer son élasticité; celui-ci se détache des surfaces, et s'échappe par l'endroit qui lui pré-

sente plus de facilité. Mais pendant ce tems, le corps continuant à glisser le long de la ligne MKM', et de nouvelles zones de sa surface plongeant dans le liquide, l'air adhérent se comprime de plus en plus. D'après cela il est aisé de voir, qu'une partie de l'air comprimé s'échappera latéralement ; tandis que l'autre partie aura plus de facilité à se porter vers la surface postérieure du mobile, où elle se mêlera au volume d'air condensé qui se trouve en XYZ.

4. Dans cet état, les forces comprimantes venant bientôt à diminuer, le ressort de l'air XYZ se developpera à son tour, et chassera avec impétuosité le corps et les eaux qui l'environnent. Soit F le point par où passe la résultante de toutes les actions de l'air sur le corps, et FM' sa direction, que nous supposerons dans le plan vertical de la route du corps, et passant par son centre. Représentons par M'Q la vîtesse qui reste au corps, suivant la direction de son mouvement réfracté, et par M'P celle que lui imprime l'élasticité de l'air : la diagonale M'R du parallélogramme M'QRP représentera la vîtesse et la nouvelle direction, que prendra le mobile, en vertu des actions combinées de sa vîtesse propre et de l'impulsion de l'air XYZ.

5. D'après cela on voit, que si la résultante M'R est assez grande, et convenablement dirigée, le projectile sera lancé hors du liquide, et paraîtra se réflechir au-dessus de sa surface, en décrivant la ligne M'RM'' : mais, si par l'angle d'incidence peu oblique

(*fig.* 3); ou par le peu de vîtesse de projection du corps, et, par conséquent, par le peu d'elasticité de l'air XYZ (*fig.* 4), la résultante M'R n'a pas la direction et la grandeur nécessaires pour relever le corps au-dessus de l'horizon et pour le lancer hors de la surface de l'eau, le ricochet n'aura pas lieu; ce qui est conforme à l'observation.

6. Les circonstances qui produisent et accompagnent le phénomène, telles que l'enfoncement du corps dans l'eau, sa déviation, l'insinuation de l'air, sa condensation, et le développement de son ressort, se succèdent si rapidement, et se font dans un intervalle de temps si court, qu'il n'est pas surprenant, si plusieurs Physiciens ont confondu ce phénomène avec la réflexion ordinaire des corps élastiques. Cette illusion devient d'autant plus séduisante, que le ricochet peut se produire, et même plus facilement, sans que le corps s'enfonce tout-à-fait sous la surface de l'eau, ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'observation, et en appliquant à la fig. 2.de les mêmes raisonnemens que nous avons faits sur la fig. 1.ère Ces ricochets présentent à la vérité une réflexion, dont cependant la cause ne réside point dans l'élasticité de l'eau, ni dans celle du corps, mais dans l'air, qui en est le véritable agent intermédiaire.

7. Il est maintenant facile de voir, pourquoi l'obliquité de l'angle d'incidence, et une certaine vîtesse du projectile, sont, en général, les conditions les plus essentielles pour produire le ricochet. En effet, à me-

sure que l'obliquité d'incidence augmente (*fig.* 2.de) la direction M'Q du mouvement réfracté se rapproche davantage de l'horizontale, et le volume d'air XYZ enveloppe d'une manière plus complète la surface inférieure et postérieure du corps. Ces deux circonstances réunies donnent à la résultante M'R une direction plus favorable pour produire le ricochet. Pareillement la grandeur de la vîtesse, avec laquelle le mobile frappe la surface de l'eau, augmente celle de l'air qui le suit, aussi bien que la pression de la couche de ce fluide qu'attrape le corps: par conséquent le volume d'air XYZ éprouvera une plus forte compression, par laquelle il déployera sur le corps un plus grand degré d'élasticité. On doit cependant observer, que la vîtesse du mobile, et l'obliquité de son incidence peuvent, jusqu'à un certain point, se compenser mutuellement: c'est-à-dire, que le ricochet peut également avoir lieu en diminuant un peu la vîtesse du corps, et en augmentant son obliquité, ou réciproquement; Ce que l'on verra mieux dans la suite.

3. Ces considérations servent aussi à rendre raison de ce que l'expérience apprend à ceux qui s'amusent à produire de semblables ricochets: C'est-à-dire, pourquoi les pierres plates réussissent mieux que les cailloux raboteux et de figure irregulière. Car les pierres plates étant lancées par leur tranchant, perdent moins de vîtesse en traversant l'atmosphère; Elles arrivent donc à la surface de l'eau, à égalité de force initiale de pro-

jection, avec plus de vîtesse, que celles qui présentent une plus grande surface à l'air. Ainsi les couches de ce fluide qui les suivent, pénètrent dans l'eau avec plus de vîtesse, et s'y condensent davantage. De plus les pierres plates, en frappant la surface du liquide avec tout leur plan, à très-peu-près, ont le double avantage et d'attraper d'une manière plus complète une plus large couche d'air, et de s'enfoncer moins dans l'eau, de sorte que la route réfractée en est plus rapprochée de l'horizontale. Ces causes favorisent le parallélogramme des vîtesses, de manière à rendre la résultante plus grande, et sa direction plus propre à produire le ricochet. Ajoutons que les cailloux raboteux et irréguliers peuvent être regardés comme terminés par plusieurs plans différemment inclinés entr'eux; Et il arrivera le plus souvent, que l'élasticité de l'air, en se déployant contre ces plans, se trouvera dirigée dans un sens défavorable au ricochet.

9. La manière dont nous avons vu, que le fluide atmosphérique se condense dans l'espace XYZ (*fig.* 1.ère), soit par l'air qui suit le corps, soit par la couche attrapée entre les deux surfaces, est conforme à ce qui a lieu dans la nature, et le ressort de l'air comprimé par ces deux causes, peut devenir capable de produire le ricochet. Cependant il est des cas, où l'une d'elles l'emporte sur l'autre; et en effet il paraît que les premiers ricochets des boulets de canon, qui rencontrent avec une grande vîtesse la surface de l'eau, sont dûs prin-

cipalement à l'air qui s'enfonce après ces projectiles dans le liquide ; ce qui devient plus évident encore par leur figure sphérique, et par la grande obliquité avec laquelle ils frappent le liquide, ce qui les fait rouler sur la surface de l'eau pour un certain temps, pendant lequel la couche d'air comprimée entre les deux surfaces s'échappe et se mêle à celui qui suit le boulet dans le sillon qu'il laisse après lui.

Quant aux ricochets des pierres plates, ils semblent produits plus particulièrement par la large couche d'air qu'elles attrapent, et voici comment. Dans le cas où la pierre frappe très-obliquement la surface de l'eau (et ce n'est qu'alors que le ricochet est possible), la couche d'air comprimée tend, aussitôt après le choc, à se dilater, et par conséquent à s'échapper de dessous la pierre par l'endroit le plus facile, qui est visiblement vers son contour. Or, la pierre, par la nature de son mouvement, et par sa figure, prend après le choc, et conserve encore dans le liquide, une direction très-rapprochée de l'horizontale, et doit par conséquent, dans les premiers instans, entraîner la couche d'air dans le même sens. Ainsi l'issue de cette couche est empêchée vers la partie antérieure de la pierre par le mouvement dont nous venons de parler, et par le refoulement d'eau, qui a lieu à l'avant du corps. Il s'en suit, qu'elle ne peut se debarrasser de dessous la pierre, qu'en la soulevant pour s'échapper vers sa partie postérieure : d'après cela il est clair que la cou-

che aërienne imprime, par son explosion, un mouvement à la pierre de bas en haut, semblable au *recul* des armes à feu, qui, combiné avec la vîtesse du mobile, peut-être capable d'en produire le ricochet. Le calcul eclaircira et confirmera ces considérations, qui ont lieu également pour d'autres phénomènes dûs à la couche d'air comprimée entre les deux surfaces, ainsi qu'on va le voir.

Application des mêmes principes à l'explication d'autres phénomènes.

10. Considérons le cas dans lequel on laisse tomber verticalement un corps solide, tel qu'une pierre, sur la surface d'un liquide, de l'eau, par exemple, supposée stagnante. L'expérience prouve que la pierre ne se réflechit pas; mais on voit se former, à l'endroit de la chute, une gerbe d'eau, qui s'élève plus ou moins autour de la verticale qui en est l'axe. La pierre, en frappant la surface de l'eau, attrape une couche d'air, dont la compression est dûe à toute la vîtesse de la pierre au moment du choc. Cette couche est, dans les premiers instans, poussée vers le bas, par l'impétuosité de la pierre; mais, son ressort devenant bientôt actif, et la vîtesse de la pierre diminuant de plus en plus, elle tend à se faire jour par l'endroit moins résistant, qui est vers les bords de la pierre. Ainsi l'air s'échappera de dessous le corps en se portant tout-à-l'entour vers sa

circonférence, et gagnant sa surface supérieure, il chassera avec force les lames d'eau qui l'enveloppent, et qui forment la gerbe verticale, que l'observation présente. Si la vitesse de la pierre est considérable, l'air qui la suit, se mêle à la couche précédente, pour produire le phénomène dont il s'agit.

Nous avons supposé l'épaisseur de la pierre assez petite, et comparable à celle d'un disque: Si elle est grande, en sorte qu'on puisse regarder la pierre comme un long cylindre ou prisme vertical, qui frappe avec sa base la surface du liquide, et si de plus l'explosion de l'air comprimé se fait avant que le prisme soit totalement plongé dans le liquide, l'eau sera chassée tout-à-l'entour du corps selon des directions obliques à l'horizon, ce qui est conforme au raisonnement et à l'expérience.

D'après cela on voit qu'un corps solide, qui tombe par la verticale, ou par une direction peu oblique, sur la surface d'un liquide, n'est pas réflechi par la couche d'air qu'il comprime, à cause de la facilité qu'elle a de s'échapper tout-à-l'entour, sans communiquer au corps une impulsion suffisante pour le lancer hors du liquide; et l'on voit également, par la nature du phénomène, que la grandeur de cette impulsion et de son effet, dépend, tout étant d'ailleurs égal, de la plus ou moins grande obliquité, sous laquelle le mobile frappe la surface du liquide. Ajoutons que dans la chute verticale de la pierre,

l'air qui la suit, s'oppose, par sa pression, à l'action de l'air comprimé sur la pierre; tandis que, dans le cas d'une direction très-oblique, l'air qui suit la pierre, favorise cette action, comme il est facile de s'en convaincre. Ces détails nous ont paru nécessaires pour prévenir les difficultés qu'on aurait pu élever.

11. Pour rendre plus sensible encore la manière dont se comporte la couche d'air comprimée, imaginons un tube vertical, fermé par en bas, et ouvert à son extrémité supérieure. Supposons qu'à son fond soit logée une bulle d'air atmosphérique, et que le tube soit rempli d'un liquide quelconque, tel que de l'eau. Il est clair que la bulle éprouvera de la part de la colonne liquide une compression, qui en diminuant son volume, en augmentera le ressort. Cela posé, si la bulle est libre, elle remontera le long de la colonne liquide, en se dilatant par des nuances insensibles, à mesure qu'elle s'avance vers le bout supérieur du tube, où étant arrivée, elle cessera de se dilater, et son volume aura la même densité que celle de l'air environnant. Le temps employé par la bulle à remonter le tube, mesure également celui qu'il lui a fallu pour reprendre, dans l'hypothèse précédente, son premier volume.

Supposons à présent, que dès que la bulle a été comprimée par la colonne liquide, cette même colonne s'anéantisse tout-à-coup, à l'exception d'une mince couche audessus de la bulle: il est visible, qu'en passant, dans ce cas,

dans un temps très-court, et presqu'inappréciable, à son premier volume, la bulle d'air produira une véritable explosion, en vertu de laquelle elle imprimera un mouvement de projection à la couche liquide qui la recouvre.

Tel est le phénomène que présente la couche d'air attrapée par la chute d'un corps solide sur la surface d'un liquide. On peut censer que cette couche au moment du choc, est comprimée par une colonne liquide d'une certaine hauteur, qui s'évanouit aussitôt que la compression cesse sur la couche d'air : elle reprend ainsi subitement son premier volume, ce qui la fait éclater avec force, en chassant au loin les lames liquides qui l'enveloppent.

On voit également, par ce qui précéde, la différence remarquable qui passe entre le mouvement de la bulle d'air que nous venons de considérer, et celui d'un corps solide à travers d'un liquide spécifiquement plus pesant. La figure et le volume du solide étant constans, sa vîtesse s'accélère de plus en plus à mesure qu'il s'élève dans le liquide, en sorte qu'en arrivant à sa surface, le mobile est doué d'une certaine vîtesse, qui le porte à prolonger son mouvement au-delà de ce terme, ainsi que le calcul et l'expérience le démontrent.

12. En faisant tomber de la hauteur de 2 à 3 mètres une grosse pierre, de 25 centimètres de diamètre par exemple, dans un bassin d'eau assez profond,

l'effet de la couche d'air comprimée devient très-sensible, et l'on voit s'élever à l'endroit de la chute une grosse gerbe d'eau, dont les gouttes supérieures sont lancées à des hauteurs beaucoup plus grandes, que celle d'où la pierre est tombée. Nous donnerons plus bas, à l'aide du calcul, l'explication complète de ce phénomène.

En faisant cette même expérience avec une petite pierre dans un canal assez profond et sensiblement horizontal, mais dont le courant ait une vîtesse comparable à celle de la pierre à son arrivée à la surface de l'eau, on voit que l'explosion de l'air condensé, poussé dans l'eau par la pierre, va se faire à une distance considérable de l'endroit de la chute. Cette expérience, qui est d'un effet très-agréable, met en évidence la manière, dont nous envisageons la production de semblables phénomènes. Car la bulle d'air enfoncée dans l'eau par la pierre est aussitôt noyée, et entraînée par le courant; mais, en vertu de sa légéreté et de sa force expansive, elle ne laisse pas, en même temps, de remonter vers la surface du canal, en décrivant une courbe convexe par rapport à son fond; ce qui la porte à éclater loin de l'endroit de la chute.

13. La quantité et la hauteur du liquide qui rejaillit par la chute d'un corps solide sur sa surface, doivent dépendre de la viscosité du liquide, du volume et de la compression de la couche d'air attrapée. Or ce volume et cette compression dépendent évidemment

de l'adhérence de l'air à la surface des différentes substances, de la figure du corps et de la vîtesse avec laquelle il frappe le liquide. Quoique d'après la théorie de la résistance des fluides, le poids spécifique du corps n'entre point dans la mesure de sa percussion avec le liquide, il est visible que dans notre cas on doit en tenir compte : car le corps le plus pesant, tout étant d'ailleurs égal, conserve plus long-temps sa vîtesse dans le liquide, et pousse, par conséquent, plus en avant la couche d'air qu'il attrape, et en augmente la compression. Pour m'assurer de l'influence que ces circonstances exercent sur le rejaillissement des liquides, j'ai entrepris les expériences suivantes, qui sont en même temps très-propres à confirmer la cause de ce phénomène.

14. *Expériences faites avec des corps solides tombant sur de l'eau.* La hauteur de l'eau dans un vase de verre cylindrique était de 13 centimètres, et le diamètre du vase de 10 centimètres. La température était de 4 à 6 degrés de Réaumur. Les résultats sont les mêmes, quelles que soient la substance et la figure du vase, pourvu qu'on puisse regarder le liquide comme *indéfini* par rapport aux dimensions des corps qu'on fait tomber sur sa surface.

I.re *Expérience. Influence de la vîtesse du solide à son arrivée à la surface de l'eau, sur la hauteur à laquelle s'élèvent les gouttes qui rejaillissent.* En laissant tomber de différentes hauteurs une boule sphérique

d'ivoire, bien lisse et sèche, de 12 millimètres de diamètre, j'ai eu les résultats suivans:

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.	
10 centimètres . .	point de rejaillissement.	
20	1 à 2	centimètres.
30	4	
40	5 à 6	
50	8 à 9	

La goutte qui rejaillit est de 2 à 3 millimètres de diamètre, et tout-à-fait détachée du petit cône liquide qui s'élève à l'endroit de la chute.

II.ᵉ *Expérience. Influence du poids spécifique.* Je me suis servi d'une balle de plomb, recouverte d'une mince couche de cire, et d'une balle de cire pure: elles étaient égales, arrondies à la main, et de 12 millimètres de diamètre.

Avec la balle de plomb, recouverte de cire, et sèche,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.
20 centimètres . . .	100 centimètres.

Avec la balle de cire, également sèche.

20 centimètres	50 à 60 centimètres.

Le liquide rejaillit sous la forme d'une gerbe verticale cônique, dont les gouttes supérieures sont lancées aux hauteurs notées.

III.ᵉ *Expérience. Influence de la substance qui forme la surface extérieure des corps, ayant d'ailleurs même figure, poids et vitesse.* Avec la balle précédente de plomb, recouverte de cire, et sèche,

Hauteur de la chute. Hauteur du rejaillissement.

20 centimètres . . . 100 centimètres.

Avec une pareille balle de plomb, non recouverte de cire, et sèche,

20 centimètres . . . 50 à 60 centimètres.

Avec cette dernière balle, frottée et échauffée assez long-tems entre les paumes des mains, immédiatement avant sa chute,

20 centimètres . . . 1 à 2 centimètres.

Avec la même balle mouillée avec de l'eau,

20 centimètres . . . rejaillissement de très-petites gouttes, qui s'éparpillent tout-à-l'entour de l'endroit de la chute.

Par cette expérience on rend très-visible la grande quantité d'air, qu'entraîne la balle de plomb, mouillée d'eau: car outre celui qui s'échappe latéralement, et qui fait rejaillir les petites gouttes, on voit, après la chute, que de grosses bulles s'en élèvent de l'intérieur du vase et remontent vers la surface du liquide.

Avec une semblable balle de plomb, dont la surface avait été rendue très-raboteuse par un grand nombre de piqûres faites avec une pointe d'acier,

Hauteur de la chute. Hauteur du rejaillissement.

20 centimètres . . . 100 centim. et au-delà.

la gerbe qui rejaillit, est très-large vers sa base.

IV.e Expérience. *Influence de la figure et des dimensions des corps.* Avec une boule de cire de 23 millimètres de diamètre, arrondie à la main, et sèche,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.
20 centimètres . . .	50 à 60 centimètres.

Cette hauteur est égale à celle de l'expérience II.[e], faite avec une boule de cire de 12 millimètres de diamètre: mais avec la boule de 23 millimètres, la gerbe d'eau est beaucoup plus grosse. En faisant tomber cette boule des hauteurs de 5, 10, 15, etc. centimètres; on voit, à travers le vase, que les bulles d'air, entraînées par la boule, deviennent de plus en plus volumineuses, à mesure que la vîtesse de la boule augmente; ce qui confirme l'influence de la vîtesse, déjà prouvée par l'expérienee I.[re].

Avec un disque de zinc de 39 millimètres de diamètre, et de 3 millimètres d'épaisseur, tombant de manière à frapper avec sa base la surface de l'eau,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.
6 à 7 centim. . . .	100 centim. et au-delà.

Avec un disque semblable de cuivre de 30 millimètres de diamètre, et de 3, 5 millimètres d'épaisseur,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.
10 centimètres . . .	150 centimètres.

la gerbe d'eau qui s'élève est très-considérable.

En recouvrant légèrement de sable fin noir, la surface d'une boule de cire, et en la laissant tomber sur de l'eau, le liquide qui rejaillit, emporte avec lui des grains de sable, ainsi que je m'en suis assuré en faisant passer promptement une bande de carton sous la gerbe pour en recevoir les gouttes. Cette expérience montre

la manière, dont la couche d'air se dégage de dessous le corps, ainsi que nous l'avons expliqué dans le N.° 10.

15. De semblables expériences, faites sur de l'huile d'olive, contenue dans le même vase, et dont la température était un peu au-dessus de son degré de congélation, m'ont donné les résultats suivants :

V. *Expérience. Influence de la vîtesse.* Avec la boule d'ivoire de l'expérience I.re,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.	
5 centimètres . .	8 à 10	centimètres.
10	60	
20	70 à 80	

Le rejaillissement se présente ici sous la forme d'une très-belle gerbe d'huile, verticale, unie et de figure cônique très-alongée. Les gouttes supérieures, qui deviennent de plus en plus petites à mesure que la gerbe s'élève, sont lancées, en se détachant, aux hauteurs précédentes. Une pareille gerbe s'est toujours montrée dans les expériences suivantes; et la différence d'une gerbe à l'autre ne consiste que dans les grosseurs et hauteurs respectives. Dans cette expérience la boule d'ivoire sèche, ou mouillée avec de l'huile, présente à-peu-près, les mêmes phénomènes.

VI. *Expérience. Influence du poids spécifique.* Avec une balle de plomb, recouverte d'une mince couche de cire (la même que celle de l'expérience II.e),

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.	
3 centimètres . . .	8 à 10	centimètres.
5.	10	
10	60	
20	100	

Avec une semblable balle de cire pure,

3 centimètres . .	insensible.
10	1 à 2 centimètres sans se détacher de la surface de l'huile.
20	10 centimètres.

Dans cette expérience, les balles sèches ou mouillées avec de l'huile, donnent les mêmes résultats.

VII.e *Expérience. Influence de la substance, qui forme la surface extérieure des corps.* Avec la balle de plomb, recouverte de cire, employée dans l'expérience précédente, mêmes résultats que ceux déjà rapportés.

Avec une semblable balle de plomb sans aucun enduit sur sa surface,

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.	
3 centimètres . .	8 à 10	centimètres.
5	10 à 15	
10	70 à 80	
20	100 et au-delà.	

Avec une semblable balle de plomb, dont la surface était très-raboteuse (Voyez l'expérience III.e)

Hauteur de la chute.	Hauteur du rejaillissement.	
5 centimètres .	50	centimètres.
10	90 à 100	
20	120 à 130	

Dans ces expériences, les balles de plomb sèches ou mouillées d'huile, ont donné le même rejaillissement, à-peu-près.

VIIIe Expérience. *Influence de la figure et des dimensions des corps.* Avec la balle de cire de l'expérience VIe, mêmes résultats, qu'on peut voir.

Avec la boule de cire de l'expérience IVe,

10 centimètres . .	60 à 70	centimètres.
20	100	

16. Les résultats de ces expériences démontrent d'une manière non équivoque l'influence qu'exercent sur le rejaillissement des liquides, l'adhérence de l'air à la surface des diverses substances, la figure, la vîtesse le poids spécifique du corps qui frappe le liquide, et la viscosité du liquide même. Les modifications que ces circonstances apportent au rejaillissement, sont autant de faits, qui concourent à prouver, que le ressort de la couche aërienne comprimée entre les surfaces du corps et du liquide, est la vraie cause de ce phénomène. Mais l'élasticité de l'air n'agit pas ici comme un ressort ordinaire, interposé entre les surfaces du corps et du liquide, sa manière d'agir est très-différente, et beaucoup plus puissante: elle se rapporte à la théorie du mouvement des fluides élastiques, qui

s'échappent par l'extrémité d'un tuyau, au fond duquel ils ont d'abord été comprimés. C'est ainsi que la couche aërienne comprimée par la boule de cire de l'expérience II.ᵉ produit un rejaillissement d'eau, 20 ou 30 fois plus considérable que si la couche n'agissait que comme un ressort ordinaire doué d'une élasticité parfaite. Nous reviendrons sur ce phénomène à l'aide du calcul.

17. Des considérations semblables ont lieu pour le rejaillissement des gouttes qui tombent sur des liquides : c'est-à-dire que ce rejaillissement est également dû au ressort de l'air attrapé entre la surface de la goutte, et celle du liquide, et qu'il dépend des mêmes circonstances rapportées au n.° 12. J'ajouterai ici quelques expériences que j'ai faites sur cet objet. La température était la même que dans les expériences précédentes.

IX.ᵉ EXPÉRIENCE. *Avec une goutte d'eau tombant sur de l'eau.* La goutte était de 4 à 6 millimètres de diamètre. En tombant de 6 à 8 centimètres, elle rejaillissait de 1 à 2 centimètres. En tombant de 30 centimètres, le rejaillissement était de 4 à 5 centimètres. La goutte qui rejaillit, est unie et un peu moindre que celle qui tombe; mais d'autres gouttes très-petites qu'on voit quelquefois rejaillir avec celle-ci, s'élèvent davantage.

En faisant tomber un volume d'eau, plus grand que celui des gouttes qui se forment naturellement à l'extrémité des corps, le rejaillissement est, sans comparaison, plus considérable. Ainsi en remplissant d'eau une cuil-

ler ordinaire, et en la tournant brusquement pour faire tomber l'eau toute d'une pièce, j'ai eu les résultats suivans :

Hauteur de la chute . . .	Hauteur du rejaillissement.	
5 centimètres . .	25	centimètres.
10	60 à 80	

une grosse gerbe d'eau s'élève à l'endroit de la chute.

X.ᵉ Expérience. *Avec une goutte d'eau tombant sur de l'huile d'olive.* Tant que la température de l'huile était peu au-dessus de sa congélation, la goutte d'eau ne rejaillissait point. En chauffant médiocrement l'huile, la goutte rejaillissait de 3 à 6 centimètres, en tombant de 20 à 30 centimètres de hauteur. On voit par cette expérience, que la chaleur en diminuant la viscosité de l'huile, empêche la goutte d'eau de s'y attacher assez fortement, pour que le ressort de la couche d'air ne puisse la soulever. On voit encore, que c'est vraiment la goutte d'eau elle-même qui rejaillit; effet produit par la double opération de la couche d'air comprimée, qui en même temps qu'elle tient la goutte séparée de l'huile, la rend, peut-être, aussi spécifiquement plus légère, et en la repoussant ensuite par son ressort, la fait rejaillir.

XI.ᵉ Expérience. *Avec une goutte d'huile tombant sur de l'eau.* Le rejaillissement n'a pas eu lieu. La goutte d'huile paraît se relever de 4 à 5 millimètres, mais sans se détacher de la surface de l'eau.

XII.ᵉ Expérience. *Avec une goutte d'huile tombant sur*

de l'huile. Point de rejaillissement, même à des températures différentes.

XIII.[e] Expérience. *Avec une goutte d'encre tombant sur de l'eau.* En tombant de 30 centimètres, la goutte d'encre rejaillissait de 2 à 3 centimètres. On voit encore ici que c'est vraiment la goutte d'encre elle-même qui rejaillit.

Il résulte de ces expériences, que la goutte liquide qui rejaillit, est la même que celle qui tombe; ce qu'on peut d'ailleurs concevoir facilement. Car la goutte en tombant sur le liquide, s'ecrase, et s'étend sur sa surface, en perdant en épaisseur ce qu'elle gagne en largeur. Sa vîtesse est par là éteinte plus promptement, et la profondeur à laquelle la goutte s'enfonce, peu considérable en elle-même, est plus grande vers son centre, que vers ses bords. Ainsi le petit creux qui se forme au-dessus de la goutte, donne à la couche d'air comprimée, plus de facilité à emporter une partie de la goutte même, en la soulevant par son milieu, qu'à se faire jour à travers le liquide environnant. Ajoutons que cette opération est sans doute favorisée par la pression latérale du liquide sur la goutte, qui, étant enveloppée par une conche d'air, représente un corps séparé, spécifiquement plus léger que le liquide environnant.

18. Je rapporterai ici un phénomène, assez piquant par lui-même, qui tient immédiatement à l'objet de ce mémoire. Soit ABCD (*fig.* 5) un vase rempli

d'eau jusqu'en AD. Si l'on y plonge un plan solide et immobile AS, incliné à l'horizon, ainsi que la figure le représente, on trouvera une certaine verticale GQ telle, qu'en y laissant tomber une goutte G, le rejaillissement se fera par la courbe QER, savoir du côté de l'angle aigu formé par la verticale et par le plan. Si l'on fait tomber la goutte par une autre verticale située vers l'extrémité S du plan, le rejaillissement se fait par la verticale elle-même, comme dans les expériences rapportées précédemment.

Par ce fait il résulte, que le rejaillissement de la goutte n'est point dû à la surface du liquide contenu dans le vase, ni à l'élasticité du plan AS; car dans le premier cas il devrait se faire sur la verticale, et dans le second sur la ligne QF. L'explication en est facile, si l'on observe, que ce phénomène n'arrive que lorsque le point Q est seulement à une telle profondeur de la surface AD, que la goutte G parvient encore à frapper le plan AS avant que l'explosion de la couche d'air comprimée ait lieu. Ainsi la goutte et la couche aërienne viennent s'écraser contre le plan au point Q; et comme, par ce que l'on vient de dire, le mouvement de la goutte n'est pas encore tout-à-fait éteint, elle tendra à glisser ou à rouler sur le plan AS; par là la couche d'air trouvera une issue plus facile dans l'angle GQA, et en s'echappant de ce côté, elle produira le rejaillissement, tel que l'expérience le présente.

19. Divers autres phénomènes s'expliquent d'une manière également simple et satisfaisante par les principes développés jusqu'ici. Ainsi les bulles qui se forment à l'occasion des pluies sur la surface des eaux, et disparaissent tour-à-tour pour faire place à d'autres, sont l'effet des couches d'air attrapées et comprimées par les gouttes, qui en se dilatant ensuite, se trouvent enveloppées de matières grasses et visqueuses surnageant sur la surface des eaux, où ces bulles se forment plus ordinairement. Pareillement des lames d'eau sont lancées par-ci par-là, lorsque les flots des fleuves, et les vagues de la mer viennent se briser avec force entre elles ou contre les rivages : l'explosion de l'air qu'elles attrapent, est la cause principale de ce phénomène. Le bouillonement des liquides, lorsque une veine liquide, éparpillée par la résistance de l'air, se jette avec vîtesse sur leur surface, est totalement dû à ce fluide entraîné par la veine, qui en remontant rapidement à la surface, chasse avec violence des gouttes tout-à-l'entour : ce phénomène, qui a lieu pour des liquides très-visqueux, et très-pesans, comme l'huile et le mercure, est analogue à celui des *cascades*, qui a été expliqué par le savant Physicien VENTURI dans ses belles *recherches sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides.* (a).

Il est également facile de rendre raison de la grande

(a) Pag. 45.

quantité d'eau, qui est lancée tout-à-l'entour, à des hauteurs et à des distances considérables, lorsqu'un solide frappe, sous une direction quelconque, la surface de ce liquide: car l'air comprimé agit par son explosion dans tous les sens, et se combine avec l'impulsion du corps, pour chasser loin le liquide qui l'environne. Nous terminerons ici le détail et l'explication de semblables phénomènes, en remarquant que pour connaître, dans l'état physique des choses, la vraie route d'un projectile, qui de l'atmosphère passe obliquement dans l'eau, avec une certaine vîtesse, il est indispensable d'avoir égard à l'action, que le ressort de l'air, qui s'enfonce dans l'eau, exerce sur le mobile; dont la déviation dépend par conséquent de son mouvement primitif, de la résistance du nouveau milieu, et de l'impulsion qu'il reçoit de l'air comprimé, au moment où celui-ci éclate.

Théorie analytique des ricochets qui se font à la surface des eaux.

20. Après avoir exposé avec détail les raisonnemens et les expériences, qui paraissent les plus propres à prouver la vérité des principes, d'où nous faisons dépendre la cause des ricochets; nous nous proposons de faire voir par le calcul, que l'air peut réellement, dans certaines circonstances, se condenser entre les surfaces du mobile et du liquide, au point de devenir capable d'imprimer, par le developpement de son

ressort, à un boulet de canon, ou à une pierre une vîtesse suffisante, et convenablement dirigée, pour en produire le ricochet. Ce calcul, en apportant aux raisonnemens qui précèdent plus de précision et de clarté, aura l'avantage de donner la mesure du phénomène, et de faire connaître les limites au-delà desquelles il ne peut avoir lieu.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que le ricochet se fait, au moins sensiblement, dans le plan vertical de la route primitive du mobile. Il est visible que si la résultante de la vîtesse imprimée par l'air au corps, et de la résistance que le liquide lui oppose, est dans un plan différent, le ricochet sort du premier plan, ainsi qu'il arrive quelquefois, particulièrement aux pierres, à cause de leur figure : mais il est également visible, que ce cas n'apporte aucun changement à la marche du calcul, si ce n'est qu'il le rend un peu plus compliqué, par la considération d'un plus grand nombre d'angles dont il faut tenir compte.

Soit (*fig.* 6.)

V la vîtesse du projectile à son arrivée à la surface de l'eau :

α L'angle de sa direction réfractée, avec la surface de l'eau, supposée sensiblement horizontale et stagnante :

$V' = M'Q$, la vîtesse du corps dans l'eau, et au moment de l'explosion de l'air condensé :

$v = M'P$, la vîtesse imprimée au corps par l'explosion de l'air condensé :

β = EM'F, l'angle que fait la direction de la vîtesse v avec l'horizontale menée par le centre du mobile supposé sphérique, et située dans le plan vertical de son mouvement.

Les vîtesses sont relatives à la seconde sexagésimale que nous prendrons pour unité de temps, et les angles sont exprimés en anciens degrés.

Ayant achevé le parallélogramme M'PRQ, on aura pour l'expression de la vîtesse résultante du corps, après l'explosion de l'air,

$$M'R = \sqrt{V'^2 + v^2 + 2\,v\,V'\cos.(\beta+\alpha)}\ :$$

maintenant, si par le centre M' du mobile on conçoit une verticale et une horizontale, de sorte que leur plan soit celui du mouvement du corps, il faut, pour que le ricochet puisse avoir lieu, que la diagonale M'R tombe dans l'angle TM'V: Nommons ω l'angle TM'R que la diagonale fait avec l'horizontale; on aura

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{v\sin.\beta - V'\sin\alpha}{v\cos.\beta + V'\cos\alpha}\ ;$$

équation qui renferme toute la théorie des ricochets; les différentes relations que peuvent avoir entre elles les quantités qui la composent, donnent directement les limites dans lesquelles seules les ricochets sont possibles, ainsi que nous allons le voir.

21. Il est d'abord visible, que pour le succès du phénomène l'angle ω doit être plus grand que zéro, et compris

dans le premier quart de la circonférence. Or la valeur précédente de tang.ω peut être positive, nulle ou négative, selon les différentes valeurs de V', v, α et β. Pour fixer les idées et pour trouver plus facilement les limites dont il s'agit, supposons en premier lieu, que les trois quantités V', v et α, soient données et que de plus $v < V'$, et cherchons dans ces hypothèses les limites de l'angle β capable de produire le ricochet, c'est-à-dire qui rendent ω positif, et compris dans le premier quart de la circonférence. On pourrait facilement déduire ces limites par des opérations analytiques sur l'expression de tang.ω: mais nous préférerons ici des constructions géométriques qui semblent jeter un plus grand jour sur cette théorie.

Soit TE (*fig.* 7) l'horizontale passant par le centre M', et située dans le plan vertical de la route du mobile, qui plonge en partie, ou entièrement dans l'eau. Soit représentée par M'Q la vîtesse V' du corps à l'instant que l'on considère, et par M'P'=M'P''=M'P'''= etc. la vîtesse v, imprimée par l'explosion de l'air au mobile, dans le même instant; et enfin par R'M'Q l'angle α que fait la route réfractée du corps avec l'horizontale. Ces quantités sont, par hypothèse, données et invariables; il s'agit de trouver dans quelles limites doivent être compris les angles β, pour que la vîtesse v agisse sur le mobile d'une manière favorable à produire le ricochet.

Du point Q, avec un rayon égal à v soit décrite la

circonférence R'R''R'''C, qui sera le lieu géométrique de l'extrémité des diagonales M'R', M'R'' etc., des divers parallélogrammes qu'on peut faire, en variant seulement l'angle β formé par la vîtesse v avec l'horizontale. Or l'inspection de la figure et le raisonnement montrent, que parmi toutes les directions de v, les seules favorables au ricochet sont celles, qui font tomber sur l'arc R'R''R''' le point extrême de la diagonale : mais de cet arc on doit encore, par la nature même de la chose, retrancher la partie R''R''' : car lorsque la diagonale aboutit à un point quelconque de l'arc R''R''', la vîtesse v est dirigée dans un sens contraire au mouvement du corps, ainsi qu'il est représenté par M'P'''; ce qui en général ne peut arriver, vu la manière dont l'air se porte à occuper l'espace XYZ (n.° 2). Ainsi, de toutes les directions possibles de v, on ne doit tenir compte que de celles qui appartiennent à l'arc R'R''. On voit pareillement que l'angle β' qui correspond au point R', ne peut pas servir pour la production du ricochet, puisque dans ce cas la résultante devient horizontale. Enfin l'angle $\beta'+\beta''$, qui rend la diagonale M'R'' tangente à l'arc R'R''R''', donne le *maximum* pour ω.

22. Les expressions de β' et $\beta'+\beta''$ feront donc connaître les limites des angles β favorables au ricochet.

Or on a (*fig.* 7.)

$$\sin.\beta'=\frac{V'}{v}.\sin.\alpha\ ;$$

$$\sin.(\beta'+\beta'')=\frac{v.\sin.\alpha+\cos\alpha.\sqrt{V'^2-v^2}}{V'}:$$

la valeur de β' répond à $\omega=0°$; celle de $\beta'+\beta''$ donne le maximum pour ω, qui est déterminé par l'équation

$$\text{tang}.\omega=\frac{v-\text{tang}.\alpha\sqrt{V'^2-v^2}}{v.\text{tang}.\alpha+\sqrt{V'^2-v^2}}:$$

partant les angles β, favorables au ricochet, sont compris entre

$$\beta'=\text{arc.sin.}\left\{\frac{V'}{v}.\sin.\alpha\right\};$$

et

$$\beta'+\beta''=\text{arc.cos.}\left\{\frac{v}{V'}\right\}-\alpha.$$

Maintenant, si parmi les quantités V', v, α et β, trois autres quelconques en sont données, et qu'on veuille les limites de la quatrième, on trouvera, en connaissant V', v et β,

$$\sin.\alpha<\frac{v.\sin.\beta}{V'};$$

en se rappelant que α est en même temps moindre que 90°, d'après les constructions précédentes.

Si V', β et α sont données, on aura

$$v>\frac{V'\sin.\alpha}{\sin.\beta};$$

et

$$V'<\frac{v.\sin\beta}{\sin.\alpha},$$

si v, β et α sont données.

Telles sont les limites, ou les relations qui doivent avoir lieu entre ces diverses quantités, pour que le

ricochet soit possible. La construction et les formules qui précèdent, supposent $v < V'$; c'est effectivement ce qui paraît avoir lieu pour les premiers ricochets des boulets de canon et des pierres lancées obliquement et avec force sur la surface de l'eau : mais dans les ricochets successifs il peut se faire, et il doit même arriver souvent, particulièrement pour les pierres, que $v > V'$; par conséquent la construction et les formules précédentes ne pouvant plus servir dans ce cas, nous allons déterminer par une méthode semblable les limites analogues, relatives à $v > V'$.

23. Soit donc (*fig.* 8) $v = M'P' > V' = M'Q$; ayant fait une construction semblable à celle du n.° 21, supposons que les quantités V', v et α soient données, et cherchons les limites de β favorables au ricochet. Il est clair que le corps, tant que les diagonales des divers parallélogrammes des vîtesses vont aboutir à l'arc $R'R''R'''$, pourra rejaillir de la surface du liquide : mais si l'on tire la verticale $M'R''$, on voit que les résultantes qui terminent à l'arc $R''R'''$ feraient réfléchir le corps selon une direction que l'observation ne présente jamais, quoique elle ne soit pas absolument impossible. Ainsi nous prendrons l'arc $R'R''$ comme le seul favorable au ricochet. Or l'angle β', qui correspond au point R', est donné par l'équation

$$\sin.\beta' = \frac{V'.\sin\alpha}{v};$$

et dans ce cas on a $\omega = 0°$: l'angle $\beta' + \beta''$, qui corres-

pond au point R″, est donné par l'équation

$$\cos.(\beta'+\beta'')=-\frac{V.\cos.\alpha}{v};$$

et dans ce cas on a $\omega=90°$. Par conséquent les angles β favorables au ricochet sont compris entre

$$\beta'=\text{arc.}\sin.\left\{\frac{V.'\sin.\alpha}{v}\right\},$$

et

$$\beta'+\beta''=\text{arc.}\cos.\left\{\frac{-V.'\cos.\alpha}{v}\right\}.$$

Si les quantités V', v et β sont données, on aura

$$\sin.\alpha<\frac{v.\sin.\beta}{V'},$$

α étant en même temps $<90.°$ Si V', α et β sont données, il faut que

$$v>\frac{V'\sin\alpha}{\sin.\beta}.$$

Enfin si v, α et β sont données, on doit avoir

$$V'<\frac{v.\sin\beta}{\sin.\alpha}.$$

On a ainsi les limites des quantités V', v, α et β, entre lesquelles le ricochet est possible, dans le cas de $v>V'$. Si $v=V'$, ce qui n'arrivera que très-rarement, on peut se servir indifféremment des formules de ce numéro, ou du précédent, qui dans ce cas deviennent égales.

24. Considérons enfin le cas, dans lequel le corps tombe verticalement sur la surface du liquide : on a vu dans le n.° 17, que des gouttes d'eau, d'encre etc., en tombant sur des liquides, rejaillissent par la verticale, et que par conséquent ce phénomène est un vrai ricochet. Dans ce cas on a

$$\alpha=90^\circ;$$

et les formules du n.° 20 deviennent

$$M'R=\sqrt{V'^2+v^2-2.vV'.\sin.\beta};$$

$$\text{tang.}\omega=\frac{v\sin\beta-V'}{v.\cos.\beta}:$$

si $\beta=90^\circ$, comme cela a lieu pour les gouttes liquides qui tombent et rejaillissent par la même verticale, les équations précédentes se transforment en celles-ci

$$M'R=\pm(V'-v);$$

$$\omega=90^\circ.$$

D'où il résulte, que pour que la goutte soit réfléchie, il est nécessaire que $v>V'$; ce qui a effectivement lieu, car le mouvement de la goutte est sensiblement éteint au moment où la couche d'air comprimée développe son ressort. Il faut de plus que la vîtesse v puisse vaincre l'adhésion, qui peut exister entre la goutte et le liquide. Si l'angle β n'est pas droit, le rejaillissement se fera par une ligne oblique à l'horizon, ainsi que cela arrive dans le phénomène rapporté au n.° 18, et à ces petites gouttes détachées, qui sont lancées tout-à-l'entour de l'endroit où le corps tombe; ce qui est encore conforme à l'observation.

25. Il nous reste maintenant à examiner, si dans le fait l'air se condense à un degré suffisant, pour que la vîtesse qu'il communique à un boulet de canon, par exemple, soit capable de le relever au-dessus de l'horizon, et de le lancer hors de la surface de l'eau.

Pour cela nous rappelerons ici, qu'en général la couche d'air attrapée entre les deux surfaces, et le vent qui, en suivant le corps, s'enfonce après lui dans le liquide, concourent, par leur action, à produire le ricochet; mais que l'une de ces deux causes peut l'emporter sur l'autre, selon les différentes circonstances. Ainsi pour simplifier les calculs, nous ne considérerons à la fois que la condensation de l'air produite de l'une ou de l'autre de ces deux manières; et il est clair, que si l'on trouve son ressort suffisant pour lancer le mobile hors de la surface de l'eau, la condensation negligée ne sera que plus favorable à la vérité du résultat. Nous supposerons donc, d'après les motifs rapportés au n.° 9, que les premiers ricochets des boulets de canon sont dûs principalement à l'air qui s'enfonce après eux dans le liquide, et qui en enveloppe la surface inférieure et postérieure.

Des Ricochets des boulets de Canon sur la surface de l'eau.

26. Pour voir si la vîtesse du boulet, à son arrivée à la surface du liquide, est assez grande pour que l'air qui le suit et s'enfonce après lui dans l'eau, s'y condense de manière, que son impulsion sur le boulet soit capable d'en produire le ricochet; nous observerons, qu'un corps qui se meut dans l'atmosphère, près de la surface de la terre, avec une vîtesse moin-

dre que 403 mètres par seconde, en prenant l'état moyen de l'atmosphère terrestre, ne laisse pas de vide après lui. Or un boulet de canon, à sa sortie de la pièce, peut avoir dans les cas les plus ordinaires, une vîtesse initiale de 300 à 700 mètres; vîtesse qui en traversant l'atmosphère pour une certaine étendue, ne tarde pas à diminuer considérablement; en sorte qu'on ne s'éloignera pas de la vérité, en supposant que la vîtesse de ces projectiles, dont on a observé les ricochets, ne surpassait pas 403 mètres, au moment de leur choc contre la surface de l'eau. Ainsi dans cette hypothèse, l'air qui suit le corps, s'enfoncera aussi dans le liquide immédiatement après lui, et s'y condensera en vertu de la vîtesse dont il est doué.

Supposons à présent que le boulet arrive à la surface de l'eau avec une vîtesse plus grande que 403 mètres: il est également aisé de se convaincre, que l'air aura le temps nécessaire pour se précipiter dans l'eau immédiatement après le corps, et pour s'enfoncer dans l'entonnoir que le mobile forme après lui sur la surface du liquide. Car si l'on suppose que les lames d'eau, soulevées latéralement par le corps, employent $\frac{1}{2}$ seconde avant que de retomber, et d'envelopper le boulet; l'air, pendant ce temps, peut parcourir dans le vide, tel que nous supposons ici l'espace contigu et postérieur au corps, 203 mètres: et si l'on veut que les couches d'eau n'employent qu' $\frac{1}{4}$ de seconde à retomber, l'air dans ce temps peut encore parcou-

rir 100 mètres, à très-peu-près. Par conséquent quelque bref que soit le temps, que les couches d'eau emploient à retomber et à se remettre de niveau; l'air aura toujours assez de vîtesse pour arriver immédiatement au corps et pénétrer après lui dans le liquide, en faisant attention que le mouvement du corps est tout-à-coup retardé par la résistance de l'eau qu'il frappe et qu'il déplace. On peut remarquer, que si ce cas a lieu (et en effet il n'est pas impossible, les plus grandes vîtesses initiales des boulets de canon pouvant monter à 1500 mètres), les ricochets doivent se faire, tout étant égal d'ailleurs, avec beaucoup plus d'énergie, à cause de la grande vîtesse avec laquelle l'air se précipite dans l'eau. Cependant pour embrasser les cas les plus ordinaires, nous supposerons $V < 403^{\text{mètr.}}$; et il est visible, que si le calcul montre la possibilité des ricochets dans ce cas, elle sera prouvée, à plus forte raison, pour le cas de $V > 403.^{\text{mètr.}}$

27. Pour arriver plus rapidement à connaître le degré de compression de l'air naturel, qui s'enfonce dans l'eau avec la vîtesse V; imaginons qu'on remplisse un vase d'un volume d'air, doué de cette vîtesse, et qu'on ferme tout-à-coup le vase. Il est clair que l'air renfermé dans ce vase aura, par la nature des fluides élastiques, toute la compression qu'il s'agit de connaître; compression qui, en ouvrant ensuite la communication du récipient avec l'atmosphère, imprime-

rait, dans le premier instant, à l'air extérieur une vîtesse initiale = V. Par conséquent la question se réduit à chercher à quel degré doit être comprimé l'air dans un vase, pour que cet air, en sortant du vase, ait, à travers l'atmosphère, supposée tranquille et dans son état moyen, une vîtesse initiale = V. La solution du problême inverse de celui-ci se trouve dans les traités d'hydrodynamique de Daniel BERNOULLI, et de M. BOSSUT, dont nous ferons usage, en l'adaptant à notre objet. Nous supposerons que la densité de l'eau est 800 fois plus grande que celle de l'air atmosphérique près de la surface de la terre *(a)*; et qu'une colonne d'eau de la hauteur de $10^{\text{mètr.}}$, 40 fait équilibre à la pression moyenne de l'atmosphère. Soit 1 la densité moyenne de l'atmosphère, et n celle de l'air du récipient. Si l'on nomme F le poids de la colonne d'eau, qui fait équilibre à la pression de l'atmosphère, la force expulsive de l'air du récipient sera équivalente au poids $(n-1)$. F; savoir à la pression d'une colonne d'eau de la hauteur de $(n-1)$. $10^{\text{mètr.}}$, 40; équivalente elle-même à une colonne d'air, par-tout de même densité que celui du récipient, et de la hauteur de

---

(a) Le rapport que nous adoptons est un peu différent de 770, 30 que M. Biot a trouvé par des expériences très-exactes. Mais pour notre objet, cette différence ne peut avoir d'influence sensible, qui d'ailleurs serait toute à l'avantage de nos résultats.

$$(n-1).(10^{\text{mètr.}},40).\frac{800}{n}:$$

Or la vîtesse produite par cette pression est

$$V=2.\sqrt{4^{\text{mètr.}},904.(n-1)(10^{\text{mètr.}},40)\frac{800}{n}}:$$

et puisque V est supposée donnée, on en tire, en effectuant les calculs numériques,

$$n=\frac{163205,12}{163205,12-V^2};$$

et la hauteur de la colonne d'eau, équivalente à la force expulsive de l'air du récipient, deviendra

$$H=\frac{(10^{\text{mètr.}},40).V^2}{163205,12-V^2}.$$

28. Si l'on veut substituer à cette colonne d'eau, une colonne équivalente de fer, ainsi que notre objet l'exige, on aura

$$H'=\frac{H}{7,2},$$

pour la hauteur de cette dernière colonne, en adoptant $\frac{1}{7,2}$ pour le rapport du poids spécifique de l'eau à celui des boulets de canon. Ainsi les vîtesses, que chaque colonne produirait sur la substance dont elle est formée, seront respectivement

$$u=\sqrt{\frac{(204,0064).V^2}{163205,12-V^2}}\quad\text{pour l'eau};$$

$$u'=\sqrt{\frac{(204,0064).V^2}{7,2\{163205,12-V^2\}}}\quad\text{pour le fer.}$$

Telles seraient donc les valeurs de v, qu'il faudrait substituer dans les formules du n.° 20, pour avoir l'effet

du ressort de l'air condensé sur l'eau ou sur le boulet, si les choses se passaient, au moment du ricochet, comme dans l'hypothèse du récipient que nous venons de faire, et n'ayant égard qu'à l'action de l'air qui suit immédiatement le boulet. Nous verrons dans la suite, que la vîtesse imprimée au projectile, par les actions combinées de l'air attrapé, et de celui qui s'enfonce après lui dans l'eau, est réellement plus grande que celle qui résulte des formules précédentes. Cependant nous l'employerons, dans les exemples suivans, telle que ces formules la donnent, comme étant suffisante pour confirmer la vérité de la cause, que nous avons assignée à la production de ces ricochets.

29. Essayons quelques applications numériques, rapprochées autant qu'il est possible, de l'observation, pour nous assurer plus positivement, si le boulet, après s'être réfracté dans l'eau, est vraiment détourné de manière à produire le ricochet, en vertu de la composition de sa vîtesse restante, avec celle que lui imprime le ressort de l'air condensé. Supposons, pour premier exemple, que pour un boulet de canon, lancé très-obliquement sur la surface de l'eau, on ait les valeurs suivantes (n.° 20)

$$V = 390^{\text{mètr.}};$$
$$V' = 300^{\text{mètr.}};$$
$$\alpha = 1^{\circ};$$

On trouvera (n.° 28)

$$u' = v = 19^{\text{mètr.}}, 70;$$

et les angles compris entre (n.° 21)

$$\beta' = 15°. 25'; \text{ et}$$

$$\beta' + \beta'' = 92°. 46',$$

seront favorables au ricochet. Prenons

$$\beta = 60°,$$

l'on aura

$$\omega' = 2°. 11';$$

$$M'R = 310.^{\text{mètr.}}$$

Cette vîtesse, avec la direction ω, est plus que suffisante pour lancer le boulet hors de la surface de l'eau: l'angle ω augmentera encore, d'après la théorie de la réfraction, et le ricochet aura lieu, conformément à ce que l'observation présente. On voit pareillement que les limites de l'angle β correspondent très-bien à la manière, dont l'air s'enfonce après le boulet dans l'eau, en se jetant dans le sillon formé sur la surface du liquide, que l'air lui-même creuse et dilate encore par la force avec laquelle il s'y précipite.

La vîtesse avec laquelle l'eau sera chassée tout-à-l'entour, à l'instant de l'explosion de l'air condensé, sera de 53 mètres, en employant la valeur de u du n.° précédent. Par conséquent si la direction de cette vîtesse était verticale, l'eau serait lancée à la hauteur de 144 mètres, sans la résistance continuelle de l'air et de sa propre viscosité. Cette grande vîtesse, et élévation de l'eau, sont encore constatées par l'observation.

Si, les autres quantités restant les mêmes, on suppose dans l'exemple précédent,

$$V'=230^{\text{mètr.}};$$

on trouvera

$$\beta'=11^\circ.\ 45';$$

$$\beta'+\beta''=93^\circ.\ 55';$$

et en prenant $\beta=45^\circ$,

on a

$$\omega = 2^\circ.\ 20';$$

$$M'R=244^{\text{mètr.}};$$

valeurs également capables de produire le ricochet.

Supposons que, pour un autre exemple, l'on ait

$$V = 325^{\text{mètr.}};$$

$$V'=190^{\text{mètr.}};$$

$$\alpha = 1^\circ;$$

On trouvera

$$u'=v=7^{\text{mètr.}},21$$

et l'angle β sera compris entre

$$\beta'=27^\circ.\ 24', \text{ et}$$

$$\beta'+\beta''=91^\circ.\ 10':$$

en faisant

$$\beta = 70^\circ,$$

on a

$$\omega = 1^\circ\ 2';$$

$$M'R=192^{\text{mètr.}},50:$$

d'où l'on voit que le ricochet aura encore lieu, et l'eau sera chassée avec une vîtesse initiale de $19^{\text{mètr.}}, 47$.

30. Nous avons supposé dans le premier exemple, que la vîtesse restante du boulet, après avoir frappé l'eau, et à l'instant de l'explosion de l'air, n'est que

les $\frac{10}{13}$ de la vîtesse à son arrivée à la surface du liquide, en sorte que la vîtesse perdue en est les $\frac{3}{13}$. Pour faire voir, que cette vîtesse est, peut-être, encore plus faible que celle que vraisemblablement le corps perd par la résistance du liquide, nous nous servirons de la formule

$$u = V . e^{\frac{-3g.x}{8r.G}},$$

qui représente, d'après la théorie ordinaire, la vîtesse d'une sphère qui se meut dans un fluide indéfini et incompressible, en négligeant l'action de la gravité, ce qui ne peut produire aucune erreur sensible dans le cas dont il s'agit. Dans cette formule, u est la vîtesse actuelle de la sphère, V sa vîtesse initiale, r son rayon, G son poids spécifique, g celui du liquide, x le chemin parcouru par la sphère depuis l'origine de son mouvement, et e la base des logarithmes hyperboliques. Dans notre exemple on a (pour un boulet dit de 24)

$$g=1\,;$$
$$G=7{,}2\,;$$
$$2r=148^{\text{millimètr.}}\,;$$
$$u=\frac{10\,V}{13}:$$

On trouve ainsi

$$x=0^{\text{mètr.}},374.$$

Or il est très-probable que le boulet parcourt, sur l'eau, un espace plus long que celui-ci avant que le ricochet se fasse: en outre comme il ne s'enfonce pas

tout-à-fait, principalement à son entrée dans l'eau, la résistance que le projectile éprouve, est plus grande que si son immersion dans le liquide était complète, par l'effet des *dénivellations (a)*. Ainsi les hypothèses numériques que nous venons de faire, peuvent être admises comme assez conformes aux principes connus. Cette remarque doit s'étendre aux autres exemples semblables.

Des ricochets des pierres sur la surface de l'eau.

31. Nous avons déjà observé (n.° 9) que les ricochets successifs des pierres, d'après leur figure et la manière dont elles frappent la surface de l'eau, paraîssent plus particulièrement produits par la large couche d'air qu'elles attrapent que par l'air qui les suit, dont la vîtesse est peu considérable. Mais on peut encore expliquer très-bien le premier ricochet, par la seule action de l'air qui s'enfonce dans la cavité faite par la pierre sur la surface de l'eau : car dans ce cas la vîtesse de l'air qui suit la pierre, est assez forte pour cet effet, qui d'ailleurs peut-être également produit par la seule couche d'air comprimée entre les deux surfaces. Nous allons rapporter ici ces calculs, en commençant par le premier, qui est semblable à celui que nous avons fait pour les boulets de canon.

(a) Nouvelle architecture de M. Prony, 1.ère partie n.° 906 et suivans.

La hauteur H du n.° 27 devient, pour les pierres,

$$H''=\frac{(10^{\text{mètr.}},40)V^2}{2,5\left\{163205,12-V^2\right\}},$$

dont la vîtesse correspondante est

$$u''=\sqrt{\frac{(204,0064).V^2}{2,5)\left\{163205,12-V^2\right\}}}:$$

$\frac{1}{2,5}$ étant le rapport du poids spécifique de l'eau à celui de semblables pierres. Soit, par exemple, une pierre lancée de manière qu'on ait

$$V=70^{\text{mètr.}};$$
$$V'=40^{\text{mètr.}};$$
$$\alpha=1^{\circ}.;$$

On trouvera

$$u''=s=1^{\text{mètr.}},60:$$
$$\beta'=25^{\circ}.\ 52';$$
$$\beta'+\beta''=91^{\circ}.\ 18':$$

En prenant

$$\beta=85^{\circ}.,$$

on a

$$\omega=1^{\circ}.\ 17';$$
$$M'R=40^{\text{mètr.}},14:$$

valeurs suffisantes pour produire le ricochet.

32. Mais ces formules ne peuvent plus servir pour les ricochets successifs, où la vîtesse de la pierre, en retombant dans l'eau, diminue considérablement d'un ricochet à l'autre. Il est donc nécessaire de faire entrer dans le calcul l'effet de la couche d'air comprimée

entre la surface de la pierre et celle du liquide: et puisque l'effet de l'air qui suit la pierre, est très-petit par rapport à celui de cette couche, nous n'y aurons point égard dans le calcul suivant. Soit V la vîtesse de la pierre à l'instant qu'elle frappe la surface liquide, et θ l'angle que sa direction fait avec la même surface, supposée horizontale; $V.\sin.\theta$ sera la vîtesse verticale de la pierre, et la compression de la couche d'air sera due à cette vîtesse. Mais parceque le plan de la pierre, en frappant l'eau, n'en touche pas, en général, la surface en tous ses points; il est clair que la compression de la couche aërienne ne correspondra qu'à une partie de la vîtesse précédente, en sorte que la vîtesse communiquée à la pierre, par l'air, sera

$$v=\frac{V.\sin\theta}{m},$$

m étant un nombre positif plus grand que l'unité, exprimant le rapport de la percussion à l'action de l'air sur la pierre. L'eau sera chassée, par la force de cette couche, avec une vîtesse représentée par

$$\frac{V\sin.\theta\sqrt{2,5}}{m}.$$

Pour faire quelques applications numériques, prenons, en premier lieu, l'exemple précédent (n.° 31.), où l'on a

$$V=70^{\text{mètr.}};$$
$$V'=40^{\text{mètr.}};$$
$$\alpha=1^{\circ}.,$$

Supposons l'angle θ, duquel dépend α, de 4°; l'angle β sera peu différent d'un angle droit, par la figure de la pierre, et par la manière dont elle frappe l'eau: Prenons-le de 85°; pour que le ricochet soit possible on doit avoir (n.° 22)

$$v > \frac{V.'\sin\alpha}{\sin.\beta},$$

c'est-àdire $m < 6{,}904$; et puisque d'un autre côté $m > 1$; il résulte que la compression de la couche d'air doit tomber, pour le succès du ricochet, entre 1 et $\frac{1}{6{,}904}$ de la force comprimante; ce qui est très-conforme aux circonstances de ce phénomène, et à la mécanique des fluides élastiques. Prenons

$$m = 3;$$

on aura

$$v = 1^{\text{mètr.}},63;$$
$$\omega = 1^\circ.\ 20';$$
$$M'R = 40^{\text{mètr.}},14.$$

Si l'on prend les limites les plus favorables, savoir

$$\beta = 90^\circ;$$
$$m = 1;$$

on trouve

$$v = 4^{\text{mètr.}},88;$$
$$\omega = 5^\circ.58';$$
$$M'R = 40^{\text{mètr.}},20;$$

et l'eau sera chassée avec une vîtesse initiale de $7^{\text{mètr.}},81$.

Ces limites ne sont pas impossibles, et doivent

même avoir lieu, si l'on fait attention, que bien souvent tous les points du plan de la pierre frappent, à fort peu-près, le liquide dans le même instant; et que le remou qui se forme à l'avant de la pierre, donne la faculté à l'air condensé de développer un plus grand degré de force.

Considérons maintenant les ricochets successifs: le peu d'élévation et d'amplitude des trajectoires décrites par la pierre, montre que ses vîtesses sont dues à de petites hauteurs, qu'on peut supposer de 0,5 à 2 ou à 3 mètres, au plus. Soit donc

$$V = 7^{\text{mètr.}};$$
$$V' = 4^{\text{mètr.}};$$
$$\theta = 10^\circ;$$
$$\alpha = 3^\circ;$$
$$\beta = 85^\circ;$$

m sera compris entre 1 et 5,78: prenons $m=2$; on aura

$$v = 0^{\text{mètr.}},60;$$
$$\omega = 5^\circ.\ 29';$$
$$M'R = 4^{\text{mètr.}},04.$$

D'où l'on voit que le ricochet se fera. Si l'on prend

$$m = 1;$$
$$\beta = 90^\circ;$$

on trouve

$$v = 1^{\text{mètr.}},20$$
$$\omega = 5^\circ.\ 35'$$
$$M'R = 4^{\text{mètr.}},23.$$

valeurs également capables de faire rejaillir la pierre; l'eau sera chassée avec une vîtesse initiale de 1 mètr.,92.

On voit, par ces exemples, avec quelle facilité on explique les ricochets des pierres, par l'effet de la couche d'air comprimée entre les deux surfaces. On explique également les bonds successifs des boulets de canon; et en examinant les limites, entre lesquelles doit être compris le nombre m, on ne peut se refuser d'y voir la véritable expression de ce qui arrive dans la nature, d'après les circonstances du phénomène. Il en résulte ainsi, que les actions combinées de l'air comprimé entre le corps et le liquide, et de celui qui s'enfonce après le mobile dans la cavité liquide, suffisent pour rendre raison dans tous les cas, de ce genre de phénomènes.

Du rejaillissement des liquides, causé par des corps qui tombent sur leur surface.

33. Si l'effet de la couche d'air comprimée entre le corps et le liquide, était simplement comparable à celui d'un ressort, doué d'une élasticité parfaite, et interposé entre les deux surfaces; il se réduirait à faire rejaillir le corps, ou une autre masse équivalente avec une force égale à celle qui a produit la compression; et dans ce cas le calcul se rapporterait à la théorie du choc des corps élastiques. C'est ce que nous avons fait dans le n.° précédent, à l'objet de simplifier les calculs

qui expliquent les ricochets des pierres. Mais cette manière d'envisager l'effet de la couche d'air comprimée, suffisante par elle-même pour expliquer la réflexion des corps à la surface de l'eau, ne peut nullement rendre raison des faits les plus remarquables, que l'observation des diverses modifications de ces phénomènes, nous met sous les yeux. Ainsi dans l'expérience IIe (n.º14) faite avec une petite boule de cire, tombant de la hauteur de 20 centimètres, on a un rejaillissement d'une gerbe d'eau, dont les gouttes supérieures s'élèvent à la hauteur de 50 à 60 centimètres, d'où l'on voit, que l'action développée par l'air sur le liquide surpasse, à beaucoup près, pour produire cet effet la force avec laquelle il a été comprimé par la boule de cire. Il faut donc que cette action se comporte d'une manière différente de celle d'un simple ressort, ainsi que nous l'avons remarqué en d'autres endroits. Voici ce que l'observation présente à cet égard.

Le volume d'air attrapé et enfoncé par le corps dans le liquide, tend aussitôt à se dilater et à remonter à la surface, dès que son ressort peut vaincre les forces comprimantes, qui viennent à diminuer, ou desquelles l'air lui-même se soustrait : le liquide qui l'enveloppe de tous côtés, est soulevé par sa force expansive ; et par les effets réunis de la liquidité, de la viscosité, de la communication latérale du mouvement, et de la pression de l'atmosphère, le volume d'air en s'élévant,

se trouve encore dans une enveloppe liquide, de forme cônique, dont il occupe le creux intérieur. Par la forme de cette enveloppe, beaucoup plus épaisse vers la base, que vers le sommet, et par la nature du mouvement de l'air renfermé, ce fluide tend à s'ouvrir le passage vers la partie supérieure de l'enveloppe, et rompant avec force, au moment de son explosion, la partie supérieure du cône liquide, chasse avec impétuosité les gouttes qui se trouvent vers cet endroit: mais pendant que l'air se précipite vers le sommet, l'enveloppe s'alonge, et le creux se resserre vers sa base, par la pression et la chute du liquide qui en forme les parois. Il s'en suit que l'espace occupé par l'air dans l'intérieur de l'enveloppe, diminue vers la base, en même temps qu'il augmente vers le sommet; ce qui conserve une plus grande élasticité au ressort de l'air, qui éclatera par conséquent avec plus d'impétuosité vers la partie supérieure de l'enveloppe.

Telle est la manière, avec laquelle la couche d'air comprimée par la chute d'un corps dans un liquide, déploie son action sur le liquide environnant. L'eau suffit pour rendre sensible ce fait : mais parmi les liquides, sur lesquels j'ai eu occasion de l'observer, l'huile d'olive est celui dans lequel ce phénomène se manifeste dans sa plus grande perfection. (Expériences du n.° 15). Il paraît donc, que pour son succès, il doit y avoir un certain rapport entre le volume et la densité de la couche d'air comprimée, et la viscosité

et l'épaisseur de l'enveloppe liquide. Car sans cela ou cette enveloppe ne pourrait pas se former, ou bien elle serait aussitôt rompue dès sa naissance; ce qui est conforme aux connaissances que l'on a sur la nature des fluides élastiques. Ainsi l'on voit par les expériences II.e et VI.e, que la compression de la couche d'air produite par la chute d'une boule de cire de la hauteur de 20 centimètres, forme dans l'eau une gerbe liquide très-épaisse vers sa base, et qui s'élève à une grande hauteur; tandis que dans l'huile d'olive cette même compression produit une gerbe peu épaisse vers sa base, et qui se romp à une petite hauteur. Au contraire on voit par les expériences I.re et V.e, que la chute d'une boule d'ivoire de la hauteur de 20 centimètres, produit dans l'huile, dont la viscosité est 15 ou 20 fois plus considérable que celle de l'eau, un rejaillissement au moins 40 fois plus grand que dans ce dernier liquide.

34. Il est maintenant visible, que c'est d'après cette manière dont se développe successivement le ressort de l'air, qu'il faudrait calculer son action sur les gouttes qu'il fait rejaillir. Mais on sent l'extrême difficulté d'introduire dans le calcul tous les élémens dont on vient de faire voir l'influence, et dont plusieurs sont encore inconnus, tels que la viscosité des différens liquides, la force plus ou moins grande avec laquelle l'air s'attache à la surface des corps, et l'épaisseur de la couche de ce fluide attrapée entre les deux surfaces.

Cependant nous présenterons ici les considérations suivantes, très-propres à mettre en évidence la cause, et la mesure du phénomène dont il s'agit.

Soit ABCGFDA (*fig.* 9) un solide creux, composé du tronc de cône ABCD, et du cylindre CGFD. Imaginons que le cône ABCD soit rempli d'un fluide élastique, d'air, par exemple, qui ayant la liberté de se dilater dans le cylindre, chasse par son ressort, le corps sphérique E, dont nous nous proposons de connaître la vîtesse. Soit

$$ND = a;$$
$$MA = ma;$$

m étant un nombre positif > 1;

$$MN = b;$$
$$ME = x:$$

nommons de plus Q la densité de l'air intérieur, D celle de l'air extérieur, et F sa force élastique; $\frac{QF}{D}$ sera la force élastique de l'air intérieur. Soit K la masse du corps E; on aura, pour la vîtesse du mobile en E,

$$u^2 = \mathcal{U}^2 + \tfrac{2}{3}.\frac{QF}{DK}.b.(m^2+m+1).log.\left\{\frac{b(m^2+m+1)+3(x-b)}{b(m^2+m+1)}\right\} - \frac{2F(x-b)}{K}$$

La constante étant déterminée de manière, que lorsque $x = b$, $u = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant la vîtesse que l'air intérieur imprimerait au mobile situé en N, s'il n'y avait pas la pièce cylindrique.

En nommant L la longueur totale MH, on aura, en mettant L pour x dans l'expression précédente, la vîtesse du corps à sa sortie de la pièce.

La longueur L, qui rend u un maximum, est

$$L=\frac{Q}{D}.b.\left\{\frac{m^2+m+1}{3}\right\}-b.\left\{\frac{m^2+m+1}{3}\right\}+b\ ;$$

ce qui donne

$$u^2=U^2+\frac{2F}{3K}b.(m^2+m+1)\left\{\frac{Q}{D}.\log.\left(\frac{Q}{D}\right)-\left(\frac{Q}{D}-1\right)\right\}.$$

Supposons maintenant qu'on ait le cylindre creux KLSR (*fig.* 10), dont le rayon soit $=a$; et qu'on ait introduit dans la partie LPQK un volume d'air égal à celui qui était dans le cône ABCD (*fig.* 9), en sorte que les densités et les volumes de ces deux masses d'air, soient égaux ; on aura

$$TX=b\left\{\frac{m^2+m+1}{3}\right\};$$

et la longueur totale TV du cylindre qui donne pour u le maximum, deviendra

$$L'=\frac{Q}{D}.b.\left\{\frac{m^2+m+1}{3}\right\};$$

et le maximum de la vîtesse sera donné par l'équation

$$u^2=U^2+\frac{2F}{3K}b.(m^2+m+1)\left\{\frac{Q}{D}.\log.\left(\frac{Q}{D}\right)-\left(\frac{Q}{D}-1\right)\right\};$$

expression qui est la même que la précédente, relative à la *fig.* 9. On en conclud que tant que m est plus grand que l'unité, on a

$$L<L':$$

Le rapport de ces deux longueurs

$$\frac{1}{1-\dfrac{(m^2+m-2)}{\frac{Q}{D}(m^2+m+1)}}$$

augmente à mesure que m est plus grand, et $\frac{Q}{D}$ peu considérable (quoique toujours > 1); ce qui est vraiment le cas du rejaillissement des petites gouttes, que nous considérons ici.

La comparaison que je viens d'établir entre les deux longueurs L et L′, a pour objet d'indiquer en quoi consiste l'avantage de l'enveloppe conique, dans laquelle se meut la couche d'air comprimée, à sa sortie du liquide. Il en résulte que cette enveloppe, qui s'engendre naturellement autour de la bulle d'air, fournit le moyen à ce fluide de développer plus rapidement son action, et de produire, par la voie la plus courte, le plus grand effet, dont son ressort soit capable.

35. Mais pour rendre plus sensible encore la force que déploie l'air renfermé dans le cône liquide, et pour se rapprocher davantage de ce qui paraît avoir lieu physiquement, considérons le cône creux ABH (*fig.* 11), et supposons, 1.° que l'air d'abord renfermé dans l'espace ABCD, soit, à mesure qu'il se précipite vers H, réduit par un mécanisme quelconque, à conserver toujours le même volume, en sorte que sa force élastique soit constante: 2.° que le diamètre du mobile E, que l'air sollicite, diminue de manière que sa surface soit toujours tangente à celle du cône. Ces hypothèses sont fort approchantes de ce qui arrive dans le cône liquide soulevé par l'air, qu'il enveloppe.

Car à mesure qu'il s'alonge, son épaisseur diminue, le creux intérieur se rétrécit, et les gouttes supérieures deviennent toujours plus petites; effet occasioné par la viscosité du liquide, et par la forme du creux, dans lequel l'air se meut. Cherchons donc, dans ces hypothèses, la vîtesse du globule dans un point quelconque E. Soit

$$MA = R;$$
$$MH = L;$$
$$MN = b;$$
$$ME = x:$$

On en conclura

$$ND = \frac{R(L-b)}{L};$$

$$ER = \frac{R(L-x)}{\sqrt{R^2+L^2}} = \text{au rayon du globule.}$$

Sa vîtesse u au point E sera donnée par l'équation

$$u^2 = \mathcal{U}^2 + \frac{3\left(\frac{QF}{D}-F-F'\right)\left(L^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4.\pi p.R^3}.\left\{\frac{1}{(L-x)^2}-\frac{1}{(L-b)^2}\right\}:$$

dans laquelle $\mathcal{U}$ est la vîtesse du globule au point N, p son poids spécifique, F' la viscosité ou la force d'adhésion de la goutte avec les parois du cône, supposée constante, π le rapport de la circonférence au diamètre; Q, D et F ont la même signification que dans le n.° précédent.

On voit par cette équation, avec quelle rapidité la vîtesse du mobile augmente, à mesure que x augmente,

en sorte que si l'on fait

$$x = L\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

n étant un nombre positif très-grand, l'expression de u devient de cette forme

$$u = n.\sqrt{A + \frac{B}{n^2}},$$

qui montre que u est du même ordre que le nombre n.

A la vérité on ne pourrait pas démontrer, que les suppositions précédentes sont, à la rigueur, conformes à ce qui a lieu dans la nature: mais il n'est pas douteux, que le creux du cône liquide se resserre et se rétrécit à mesure qu'il s'alonge, ce qui rend l'équation que nous venons de tirer, très-propre à expliquer d'une manière satisfaisante, comment des gouttes très-petites de liquide, qui n'ont pas un demi-millimètre de diamètre, sont lancées à des hauteurs si considérables, soit par rapport à la compression de l'air faite par la chute du corps; soit par rapport à la hauteur, à laquelle s'élèvent d'autres gouttes plus grosses, qui d'ailleurs doivent éprouver une moindre résistance de la part de l'atmosphère, comparativement aux gouttes plus petites. Ainsi, pour en apporter un exemple (n.° 15. Expérience V.e) le rejaillissement des petites gouttes d'huile produit par la chute d'une petite boule d'ivoire, est tel que leur vîtesse initiale a dû être plus forte que de 3 mètr., 83, tandis que la vîtesse finale de la boule n'arrivait pas à 1 mètr., 98.

36. La manière dont nous venons de considérer l'effet de l'air comprimé par un corps, qui tombe verticalement sur un liquide, doit s'étendre au cas, dans lequel la chute n'est pas verticale, comme dans celui des ricochets des pierres et des boulets de canon. Car il est aisé de concevoir, que l'air condensé soit qu'il agisse contre le corps, et en produise la réflexion, soit que son action s'exerce sur le liquide, dont il est enveloppé, se meut dans tous les cas à-peu-près comme dans un tuyau, au moins dans les premiers instans: par là l'action de son ressort ne se fait pas seulement par un coup instantané, mais elle dure pendant un temps fini et appréciable, ce qui lui donne le caractère d'une véritable force accélératrice. D'où l'on déduit que la force développée par l'air dans la production des ricochets, est réellement plus grande, que celle que nous avons adoptée dans les n.os 27 et 32, ainsi que nous l'avions remarqué plus haut.

Les gouttes qui tombent sur des liquides, et qui en rejaillissant conservent sensiblement la même grosseur, ne s'élèvent pas, à beaucoup près, à des hauteurs aussi grandes, que les gouttes qui rejaillissent par la chute des corps solides. D'après la manière, dont la goutte, en tombant, s'étend sur le liquide, sans se mêler avec lui par l'effet de la couche d'air interposée entre les deux surfaces, on voit que le cône liquide creux ne peut pas avoir lieu, au moins sensiblement; car la couche aërienne en soulevant la goutte, n'est

plus enveloppée par le liquide, et son ressort se met aussitôt en équilibre avec celui de l'air environnant. Mais si un plus grand volume de liquide tombe tout d'une pièce sur la surface d'un liquide (n.° 17. Expérience IX.ᵉ), alors le rejaillissement qu'il produit, est comparable à celui causé par des corps solides, et rentre entièrement dans la théorie que nous venons d'exposer.

37. Nous terminerons cet article par quelques remarques sur ce qui arriverait en laissant tomber une goutte d'eau dans un vase rempli de ce liquide, et placé sous le récipient de la machine pneumatique, où l'on ait raréfié l'air. D'après la cause à laquelle nous attribuons la réflexion de la goutte, elle ne doit point rejaillir, ni se détacher de la surface liquide, dans le vide parfait, et lorsqu'il n'y a pas d'air adhérent à la surface des corps. Or on sent combien il est difficile de remplir ces conditions dans nos meilleures machines, celle sur-tout de dépouiller entièrement la surface des corps de la couche aërienne qui l'enveloppe. Voyons donc ce que le calcul nous apprend à cet égard.

Supposons que la pression de l'air, sous le récipient pneumatique, corresponde à 1 millimètre de la colonne barométrique : cet air sera d'environ 750 fois moins dense que l'air extérieur. Maintenant si on laisse tomber sous le récipient une goutte de la hauteur de 30 centimètres, la pression qu'elle exercera sur la surface frappée, sera équivalente, d'après la théorie de

la percussion des fluides, à celle d'une colonne d'eau de la hauteur de 30 centimètres: ainsi la couche d'air attrapée sera comprimée, au moment du choc, par une colonne d'eau de 314 millimètres de hauteur; et par conséquent sa densité ne sera plus, dans cet état, que 33 fois moindre que celle de l'air extérieur, tandis qu'elle sera 22 fois plus grande, que la densité de l'air du récipient. Or les physiciens conviennent, d'après un grand nombre d'expériences, que la loi de la proportionnalité de l'élasticité de ce fluide à la pression qu'il éprouve, est encore sensiblement exacte à une densité cent fois moindre que celle de l'air atmosphérique près de la surface de la terre. Il s'en suit, que la couche aërienne comprimée par la goutte, qui n'est que 33 fois plus rare que l'air extérieur, et qui d'ailleurs est 22 fois plus dense que l'air du récipient, doit éclater aussitôt que la compression vient à cesser, pour se remettre en équilibre avec l'air du récipient.

Il résulte donc que dans la raréfaction que nous venons de supposer, le rejaillissement de la goutte peut encore avoir lieu, par l'effet du ressort de la couche d'air qu'elle comprime. On a vu que la goutte tombant de la même hauteur en plein air, rejaillit de 4 à 5 centimètr. La densité de la couche aërienne qu'elle comprime, est dans ce cas à la densité de l'air atmosphérique, comme 103: 100; ce rapport, beaucoup plus faible que le précédent, 22 : 1, montre, que quoique la densité de l'air comprimé ne soit

pas due a toute la pression produite par le choc de la goutte, dans l'expérience sous la machine pneumatique; elle deviendrait toutefois encore assez forte, relativement à l'air du récipient, pour faire rejaillir la goutte.

38. De ce qui précède on peut donc conclure que *la vraie cause des ricochets à la surface de l'eau consiste dans l'action de la couche d'air comprimée entre la surface du corps et celle du liquide, et dans l'action du vent qui s'enfonce après le corps dans le creux fait sur le liquide, combinées avec la vîtesse et la direction du corps au moment du ricochet.* Pareillement *le ressort de l'air comprimé au moment du choc, entre les surfaces du liquide et du corps, est la vraie cause du rejaillissement du liquide.* On a vu que par l'application et le développement de cette cause on satisfait complétement à l'ensemble des observations, et à tous les détails de ces phénomènes. Il en résulte ainsi que leur théorie rentre dans celle des armes à feu; et que les mêmes principes de calcul, qui déterminent le mouvement et la vîtesse des boulets de canon à leur sortie de la pièce, servent également à rendre raison des bonds, qu'ils font sur la surface des eaux.

Considérations générales sur les explications données jusqu'à présent des ricochets à la surface des eaux.

39. Parmi les causes auxquelles on a attribué la production de ces ricochets, l'élasticité de l'eau est, peut-être, la première qui s'est présentée à l'esprit des observateurs, qui ont dû même la regarder comme la plus probable et la plus satisfaisante, par l'avantage séduisant qu'elle offre au premier abord dans la facilité apparente de se plier sans détours à l'explication du phénomène. L'élasticité de l'eau était ainsi prouvée par la réflexion des corps à sa surface, réflexion qui à son tour s'expliquait sans peine par cette propriété du liquide. Musschenbroëk s'exprime ainsi à cet égard : *(a)* « Les ricochets qu'on voit faire » aux pierres qu'on lance obliquement sur l'eau ; ceux des » boulets de canon, qui attrapent obliquement sa surface, » prouvent qu'elle est élastique ». D'autres physiciens ont crû qu'en vertu de la grande obliquité, avec laquelle il faut lancer le corps, pour qu'il fasse des bonds sur la surface de l'eau, un petit degré d'élasticité dans ce liquide suffit pour produire la réflexion du corps : mais il est facile de s'assurer du contraire. Soit un projectile, qui frappe avec la vîtesse V, et sous l'angle θ la surface stagnante et horizontale de l'eau, con-

(*a*) Cours de physique N.° 1447.

sidérée comme un plan élastique; et soit θ' l'angle sous lequel il est réflechi: Le rapport de l'élasticité à la percussion sera représenté par

$$\frac{\text{tang.}\theta'}{\text{tang.}\theta} ;$$

Or l'observation prouve que l'angle θ' est souvent égal et quelque fois même plus grand que l'angle θ, principalement dans les ricochets des pierres : le rapport précédent deviendrait ainsi égal ou plus grand que l'unité; ce qui indique que l'élasticité de l'eau doit, au moins, être *parfaite*, pour répondre à l'observation. Supposons que la composante horizontale de la vîtesse V se réduise à $\frac{V.\cos\theta}{n}$, (n étant un nombre positif plus grand que l'unité), par l'effet de la résistance de l'eau pendant le temps que le corps glisse sur sa surface; le rapport précédent de l'élasticité à la percussion deviendra

$$\frac{\text{tang.}\theta'}{n.\text{tang.}\theta} ;$$

expression qui fait voir que ce rapport diminue à mesure que n augmente; c'est-à-dire, que l'élasticité dépend de la perte de la vîtesse horizontale que fait le mobile sur la surface de l'eau; ce qui est inadmissible.

Considérons le cas d'une goutte d'eau qui tombe verticalement sur la surface de ce liquide. Nous avons vu (n.° 17) qu'en tombant de la hauteur de 30 centimètres, la goutte rejaillit par la verticale à 5 cen-

timètres. Dans ce cas pour que le rejaillissement soit dû à l'élasticité de l'eau, il faut que son rapport à la percussion soit de 0,41. Dans cette expérience nous ne considérons point le rejaillissement des petites gouttes, qui par le choc de la goutte qui tombe, s'élèvent quelquefois à des hauteurs beaucoup plus grandes que celle que nous venons de rapporter. Il suit de ces considérations et de ces expériences, que la force élastique de l'eau, capable de produire la réflexion des corps à sa surface, devrait être si grande, qu'on ne peut concevoir, comment elle a pu échapper aux expériences directes, et comment il peut se faire qu'elle ne se manifeste pas à un aussi haut degré dans aucun autre phénomène. L'élasticité des liquides ne suffit donc pas pour expliquer les ricochets et les rejaillissemens, qui se font à leur surface, et d'autant moins si l'on ajoute la circonstance très-remarquable, que les ricochets n'ont lieu que sous de très-petits angles d'incidence.

40. D'Alembert est le premier, qui a cherché à expliquer les ricochets par la théorie de la résistance des fluides, ainsi qu'on peut le voir dans l'Encyclopédie aux articles *Réfraction* et *Ricochets*, dont il est l'auteur. Nous sommes loin de vouloir entreprendre ici la discussion des principes, sur lesquels ce grand géomètre fonde sa théorie. Nous noterons seulement, qu'il a négligé tout-à-fait l'action de l'air comprimé par le corps, et de celui qui s'enfonce après lui dans l'entonnoir liquide; action qui devient très-puissante dans

le cas, où le mobile a une grande vîtesse, comme les boulets de canon. Il est clair qu'ayant égard à l'action du vent qui suit le corps, on ne peut plus supposer que les zônes sphériques, qui n'ont pas encore atteint la surface de l'eau, éprouvent une égale résistance dans toute leur étendue; car la surface postérieure du corps est poussée davantage par l'air, qui, en la suivant de près avec toute sa vîtesse, vient la frapper, lorsque le mobile s'arrête ou perd une partie finie de son mouvement, ainsi que nous l'avons expliqué au commencement de ce Mémoire.

On voit donc que la théorie de D'ALEMBERT n'embrasse point toutes les causes, qui concourent à produire les ricochets, et ne peut aucunement se lier à l'explication des autres phénomènes analogues, tels que le rejaillissement des liquides occasioné par la chute des corps sur leur surface, et la réflexion des gouttes, qui tombent verticalement sur des liquides.

L'explication de D'ALEMBERT a été suivie par quelques physiciens: mais la manière vague dont ils l'exposent, ou la modifient, la rend très-difficile à concevoir. Voici comment s'énonce M.r BRISSON dans son Dictionnaire de physique, à l'article *Ricochets*: « La » cause du ricochet est la résistance de l'eau. Si l'on » lance très-obliquement un corps sur la surface de » l'eau, et avec assez de vîtesse; ce fluide lui résiste » assez de temps, pour l'empêcher d'y entrer, et l'obliger » à se réfléchir et à continuer son mouvement dans l'air. »

Cet auteur tient à-peu-près le même langage à l'article *Réfraction* : « Quand l'incidence, dit-il, est » très-oblique, il arrive souvent que le mobile au lieu » de se plonger dans le milieu réfringent, se réfléchit » comme s'il tombait sur un plan solide. C'est ce qui » arrive à un boulet de canon tiré très-obliquement à » la surface de l'eau. Dans ce cas là, l'eau lui refuse » assez long-temps le passage, pour lui donner lieu de » continuer son mouvement dans l'air, et il se réfléchit » de dessus l'eau, comme il le ferait de dessus un plan » solide, et par les mêmes raisons. » On voit par ces passages que l'auteur rapportait le phénomène des ricochets ou à la théorie de D'ALEMBERT, ou à l'élasticité de l'eau, ou, plus probablement, à l'une et à l'autre de ces deux causes à la fois, si l'on veut donner un sens à sa manière de s'exprimer.

41. Le célèbre SPALLANZANI s'est aussi occupé de cet objet dans une Dissertation imprimée à Modène l'an 1765 (*a*). Cet écrit, recommandable par l'intérêt que ce savant Naturaliste a su y répandre, et par la variété des expériences qu'il renferme, est le premier, peut-être, et le seul jusqu'ici, où le phénomène des ricochets et du rejaillissement des liquides soit exposé avec le plus grand détail. Après avoir cherché à établir, que les liquides ne sont point élastiques, et que par

---

(*a*) De lapidibus ab aqua resilientibus, dissertatio.

conséquent on ne peut tirer, de cette propriété, l'explication des ricochets à la surface de l'eau, M.r SPALLANZANI considère le rejaillissement des gouttes, qui tombent verticalement sur des liquides; et il avoue que la formation des bulles, occasionée par les gouttes de pluie qui tombent sur de l'eau, l'avait d'abord porté à regarder l'air comprimé comme la vraie cause de ce rejaillissement; mais qu'ayant vu par l'expérience, qu'il avait également lieu sous la cloche pneumatique, il a abandonné entièrement cette première idée.

L'Auteur rapporte ensuite un grand nombre d'expériences, qu'il a faites avec des gouttes de différens liquides, et avec des corps solides, tombant verticalement sur des liquides ou sur d'autres substances plus ou moins molles; et après avoir reconnu, que la goutte qui tombe est identique avec celle qui rejaillit, en s'élevant sur le sommet d'un petit cône liquide qui la suit; et qu'à l'endroit de la chute il se forme une cavité; il en conclud, que la cause du rejaillissement consiste dans la force avec laquelle les eaux latérales affluent pour remplir cet entonnoir creux, en faisant ainsi rejaillir la goutte qui s'y trouve au milieu.

De là M.r SPALLANZANI, passant aux ricochets des pierres et des balles de fusil, appuyé à diverses expériences qu'il rapporte, attribue enfin ce phénomène à ce que le projectile forme sur la surface de l'eau, à l'instant du choc, un entonnoir creux, qui

se présente comme une surface courbe, dont la convexité est tournée vers le fond du bassin : le mobile glisse, suivant l'Auteur, sur cette surface courbe, comme sur deux plans inclinés, et produit, en remontant de l'autre côté, le phénomène du ricochet. Tel est, en peu de mots, le précis de l'explication de M.r SPALLANZANI, que M.r ARALDI paraît avoir adoptée. (*a*)

42. Par cet exposé on voit d'abord, que M.r SPALLANZANI n'ayant point eu égard à l'action de l'air comprimé, a dû faire dépendre de principes différens la réflexion des gouttes et les ricochets des corps à la surface de l'eau; circonstance qui diminue extrêmement la probabilité de sa théorie, que d'ailleurs il n'a point vérifiée par le calcul. Mais pour l'apprécier de près, et directement, supposons que sous la pompe pneumatique, dans laquelle M.r SPALLANZANI a observé le rejaillissement des gouttes, la raréfaction de l'air, dont il n'a point noté le degré dans son Mémoire, correspondît à la pression d'un millimètre de mercure; raréfaction qu'on ne saurait pousser plus loin avec les meilleures machines pneumatiques. Nous avons vu (n.° 37.) que dans ce cas l'air se condense encore, par le choc de la goutte tombant de la hauteur de 30 centimètres, à un degré suffisant pour en produire la

---

(*a*) Mémoires de l'Institut Italien, Classe de Physique et de Mathématique, tom. 2, part. 1.ère, pag. 343-4. Bologne 1808.

réflexion par son ressort. Il est très-vraisemblable d'ailleurs, que la raréfaction de l'air, dans l'expérience de M.r SPALLANZANI, n'arrivait pas au degré que nous venons de supposer.

Si la goutte, dont ce savant Naturaliste a observé le rejaillissement sous le récipient pneumatique, s'est vraiment détachée de la surface du liquide contenu dans le vase, il en résulte que son poids spécifique était moindre, que celui de l'eau, sur laquelle elle était tombée. Car la goutte en tombant sur de l'eau, s'y enfonce jusqu'à ce que sa vîtesse soit entièrement détruite, et alors elle se trouve au point le plus bas du creux qu'elle forme : et il est clair que cette goutte ne saurait remonter, si son poids spécifique était égal à celui des eaux environnantes. Si donc ces eaux ont la force de la soulever, il faut que la goutte soit plus légère; ce qu'on ne peut concevoir, qu'en admettant que la goutte est enveloppée par quelque couche, qui la rend spécifiquement plus légère, et l'empêche de se confondre avec le liquide du vase. Cette remarque, qui n'a pas échappé à M.r ARALDI, mais dont il n'a pas tiré parti, n'ayant considéré cette enveloppe que comme un moyen d'empêcher la goutte de se confondre avec le liquide, montre évidemment, que l'action de l'air n'était pas insensible dans l'expérience de M.r SPALLANZANI.

Du reste il est facile de se convaincre, d'après les lois générales de la mécanique, qu'un certain soulever-

ment du liquide, très-différent du rejaillissement proprement dit, doit aussi avoir lieu à l'endroit frappé par le corps, dans le vide absolu. Car on sait qu'un sistème de corps, dont l'équilibre est *stable*, étant un peu dérangé de sa position, tend à y revenir, en faisant autour de son état primitif des oscillations plus ou moins étendues. Cette loi, qui s'applique immédiatement au cas dont il s'agit, explique le petit cône liquide, qui s'élève à l'endroit de la chute d'une goutte, phénomène qui doit avoir lieu dans le vide parfait, comme en plein air. On doit cependant observer, que dans l'air libre s'ajoute à la loi précédente la pression de l'atmosphère pour favoriser la formation de ce cône liquide, dont la hauteur est augmentée par la succion du vide que laisse la goutte, qui s'échappe de dessus le sommet de ce même cône. Ce petit cône, peu considérable, et qui forme une masse continue avec le liquide du vase, est très-différent, soit du *rejaillissement* des gouttes, qui se détachent tout-à-fait de la surface liquide, et s'élèvent à diverses hauteurs; soit de la *gerbe liquide*, que nous avons décrite et expliquée dans le n.° 33, et dont la hauteur est de plusieurs décimètres.

43. Mais pour rendre plus évidente encore l'insuffisance de la théorie que nous discutons; nous mettrons sous les yeux les difficultés insurmontables qu'elle présente, à l'aide de deux expériences très-simples, qui quoique faites en plein air, ne sont pas moins concluantes, que des directes faites dans le vide absolu,

si l'on pouvait en avoir. Une boule d'ivoire, de 12 millimètres de diamètre, faite au tour, très-lisse, parfaitement sphérique et sèche, tombant de la hauteur de 20 centimètres sur de l'eau dormante, fait rejaillir une goutte qui ne s'élève que de 1 à 2 centimètres au plus. En laissant tomber de la même hauteur, une semblable boule de cire, arrondie à la main, et sèche, le rejaillissement produit par son choc se présente sous la forme d'une belle et haute gerbe d'eau, très-considérable vers sa base, et dont les gouttes supérieures sont lancées à la hauteur de 50 à 60 centimètres.

Or comment peut-on, d'après M.r Spallanzani, expliquer ces faits par la seule force, avec laquelle les eaux latérales affluent pour remplir l'entonnoir creux? N'est-il pas évident, que l'impulsion de la boule d'ivoire sur la surface de l'eau, est pour le moins équivalente à celle produite par la boule de cire? N'est-il pas également clair, que si l'on attribue à cette impulsion seule le rejaillissement produit par la boule de cire, il faut supposer que la force avec laquelle les eaux latérales accourent vers le creux, est pour le moins 20 ou 30 fois plus considérable que le choc de la boule, eu égard à la masse d'eau qui rejaillit, et à la hauteur, à laquelle les gouttes supérieures s'élèvent? De plus comment la direction des eaux latérales peut-elle se changer tout-à-coup, par leur rencontre, dans une direction verticale et ascendante, tandis que primitivement elle tend au centre du creux et vers le bas?

Ce sont là autant de circonstances inexplicables suivant la théorie de M.r Spallanzani, et qui deviennent extrémement simples et faciles à concevoir d'après la nôtre. En effet il suffit d'avoir égard à l'épaisseur et à l'adhérence plus ou moins forte de la couche aërienne à la surface des différentes substances, et à son degré de compression au moment du choc. La couche adhérente à la boule d'ivoire est très-mince; celle qui enveloppe la boule de cire, beaucoup plus volumineuse, est, peut-être, aussi primitivement plus dense. Ainsi cette boule attrape et comprime un plus grand volume d'air, qui doit par conséquent produire par sa force expansive un plus grand effet. Il est facile d'ailleurs de s'assurer de la quantité d'air adhérent à la surface des substances dont il s'agit, en les plongeant légèrement dans l'eau à la même profondeur. On voit par là que la boule de cire se couvre d'un grand nombre de bulles d'air très-visibles, tandis que la boule d'ivoire en est presque totalement dépourvue. Si l'on mouille avec de l'eau la surface de la boule de cire, le rejaillissement produit par sa chute, diminue sensiblement en quantité et en hauteur.

Quant à l'explication que donne M.r Spallanzani des ricochets à la surface de l'eau, en supposant que le mobile glisse sur la courbure de l'entonnoir, comme sur deux plans inclinés, l'un descendant, et l'autre ascendant; il est aisé de voir, qu'elle n'est point conforme à ce qui a lieu dans la nature, ni même compatible avec

les idées que nous avons sur la nature des liquides. Car le corps en frappant la surface du liquide, devrait naturellement se trouver au centre et non pas sur les bords de l'entonnoir creux qu'il forme par son choc. En outre comment pourrait-il, après être descendu jusqu'au centre remonter de l'autre côté, sans supposer les parois de l'entonnoir parfaitement solides, et moulées, pour ainsi dire, sur la figure du mobile, pour que ce changement de direction puisse avoir lieu? Mais, ces réflexions à part, l'observation et l'expérience montrent, que dans le sens du mouvement du corps, pendant qu'il ne plonge pas encore entièrement dans le liquide, il se fait un véritable refoulement d'eau, qui produit une *dénivellation*, ou différence de niveau de l'avant à l'arrière du corps, qui retarde sa vîtesse; et ce n'est que vers cette partie que le creux se forme.

Nous croyons inutile d'insister davantage sur la théorie de M.r Spallanzani. Les considérations que nous pourrions ajouter, se présenteront sans peine, en examinant, d'après l'expérience et les lois de la mécanique, la nature et la marche des phénomènes dont il s'agit.

44. M.r Avanzini dans un travail très-étendu et très-intéressant qu'il a entrepris sur la résistance des fluides (*a*), se propose de donner dans la suite de ses Mé-

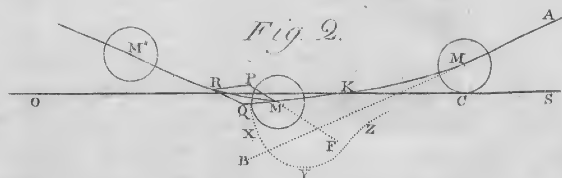
(*a*) Mémoires de l'Institut Italien, classe de Physique et de Mathématique, tom. 1, partie 1.ère, pag. 199. Bologne 1806.

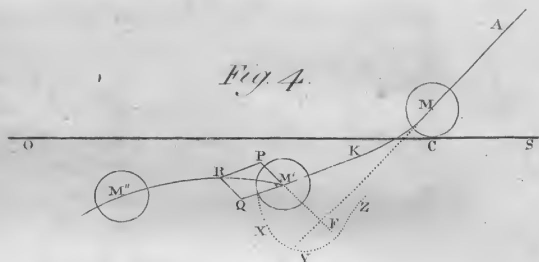
moires, l'explication des ricochets qui se font à la surface de l'eau. D'après les principes qu'il pose dans son premier Mémoire (*a*), il paraît attribuer ce phénomène à ce que le centre de gravité du corps ne coïncide pas avec celui de sa figure. Il n'est pas douteux, qu'une telle circonstance doit en général avoir lieu pour la plupart des corps, aussi bien que pour les boulets de canon; car ce n'est effectivement que par un hasard extrêmement rare qu'il peut se faire que les deux centres coïncident dans un même point. Il est également vrai, que cette circonstance peut servir à rendre raison de divers phénomènes, ainsi que le savant Auteur le fait voir dans le Mémoire cité. Mais il ne paraît pas qu'elle seule soit suffisante pour expliquer complétement les ricochets: elle est même tout-à-fait inutile pour rendre raison du rejaillissement des gouttes, et de la quantité et de la hauteur à laquelle le liquide rejaillit par la chute *verticale* d'un corps solide sur sa surface. On conçoit cependant, que la direction plus ou moins oblique du mobile, ainsi que sa liquidité, ou sa solidité, ne doit pas établir ici une théorie indépendante du cas général; et l'on a pu voir que la nôtre se prête à toutes ces modifications, comme à autant de cas particuliers. Si à la considération de

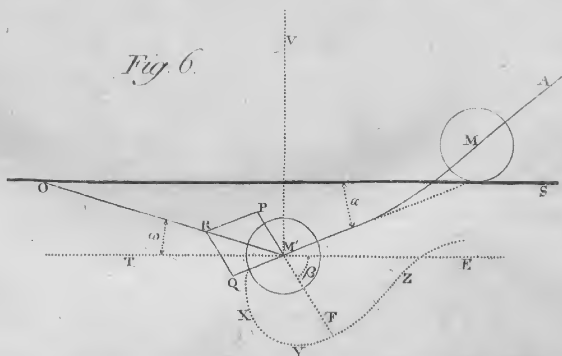
---

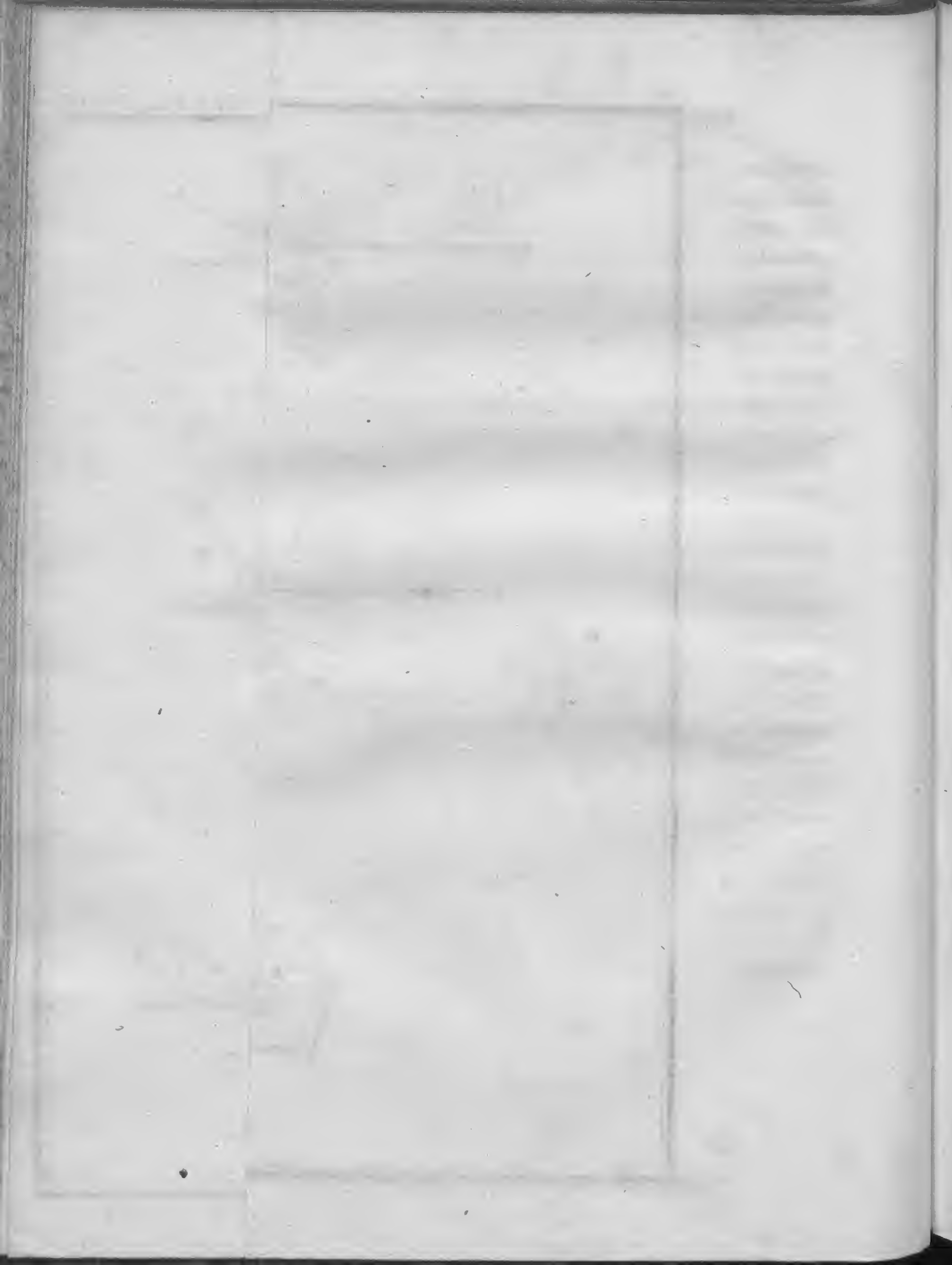
(*a*) Endroit cité, pag. 318-20.

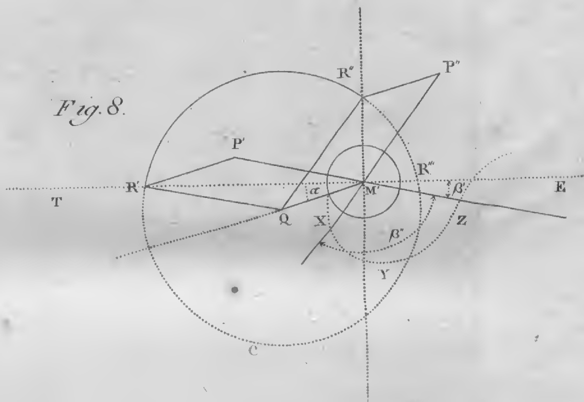
la non-coïncidence des centres de gravité et de figure, M.[r] Avanzini ajoute l'action de l'air que le corps comprime, ou qui s'enfonce après lui dans le liquide, ma Théorie sur les ricochets, analysée par un Géomètre qui s'occupe si avantageusement de la Théorie importante et délicate de la résistance des fluides, ne pourra qu'y gagner et qu'acquérir toute la certitude, dont les explications physiques sont susceptibles.

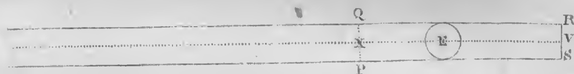

Fig. 2.
M''
M
A
R
P
K
O
Q
M'
C
S
X
F
Z
B
Y


A
Fig. 4.
M
O
C
S
K
P
R
M'
M''
Q
Z
X
F
Y


V
Fig. 6.
A
M
O
S
α
P
R
ω
M'
T
E
Q
β
Z
X
F
Y




Fig. 8.
R''
P''
P'
R'''
R'
T
α
M'
β'
E
Q
X
β''
Z
Y
C


Fig. 10.
Q
R
X
E
V
S
P

MÉMOIRE

DE M. LE BARON DE-ZACH

SUR LE DEGRÉ DU MÉRIDIEN

MESURÉ EN PIÉMONT

PAR LE PÈRE BECCARIA.

Lu à la Séance du 16 juin 1810.

On a cru jusqu'à présent que la meilleure méthode dont les Astronomes pouvaient se servir pour déterminer la grandeur et la figure de la terre, était de mesurer les degrés de la terre sous différentes latitudes. Effectivement deux degrés de latitude mesurés à différentes distances des pôles, suffisent à la rigueur pour en déterminer toutes les dimensions, en supposant que la terre soit un solide de révolution, et que sa figure soit régulière et elliptique, comme cela devrait être en vertu de la pesanteur naturelle dans un fluide homogène.

On a mesuré et remesuré à cet effet plusieurs degrés à l'Équateur, au Pôle, en France, en Angleterre, en Italie, en Allemagne, en Asie, en Afrique, et en Amérique. Mais les résultats qu'on a tirés de ces différentes mesures ne s'accordaient pas à donner les mêmes dimensions à

la terre, ni les mêmes rapports pour l'ellipticité de sa figure.

La théorie de la pesanteur universelle nous fournit à la vérité plusieurs autres moyens pour reconnaître la figure de la terre sans employer ces mesures compliquées, mais on ne les croyait pas aussi directs que ces mesures actuelles. Les quantités de la précession des équinoxes, de la nutation de l'axe terrestre, des équations lunaires, des marées et de la longueur du pendule simple, nous fournissent autant de moyens de reconnaître l'ellipticité ou l'aplatissement de notre globe. Les théories dans ces recherches ayant été portées dans ces derniers tems à un très-haut degré de perfection, les observations modernes les plus délicates nous ayant fourni ces quantités avec une très-grande exactitude, on a pu en tirer des conclusions très-satisfaisantes. Effectivement les résultats que donnent ces différens phénomènes présentent entr'eux un accord presque merveilleux, auquel il s'en faut beaucoup que les mesures de degrés soient arrivées.

La précession des équinoxes, la nutation, la constante de la parallaxe de la Lune, les marées, la longueur du pendule simple s'accordent tous à donner pour l'aplatissement de la terre les rapports de $\frac{1}{305}$, $\frac{1}{310}$, $\frac{1}{320}$.

Le comte LA-PLACE dans sa théorie de la Lune (1)

(1) Mécanique céleste, vol. III, pag. 173.

a trouvé deux équations très-remarquables, qui dépendent de la figure de la terre ; la première est une équation de longitude de la Lune, qui dépend de la longitude de son nœud ; l'autre est une équation de latitude, qui dépend du sinus de la longitude vraie de la Lune ; M. Burg en a déterminé les coëficiens avec le plus grand soin d'après plusieurs milliers d'observations de Greenwich ; l'une et l'autre s'accordent à donner pour aplatissement de la terre entre $\frac{1}{305}$ et $\frac{1}{310}$ (1)

Mais les mesures des degrés sont bien loin de nous présenter ce même accord, en les comparant, et les combinant de mille manières, elles nous donnent des rapports d'aplatissement qui varient depuis $\frac{1}{112}$ jusqu'à $\frac{1}{500}$ Comment concilier, ou plutôt comment expliquer d'aussi grandes différences ? On n'a pas tardé à reconnaître dès les premiers tems, des irrégularités dans les mesures des degrés, on les a rejetées sur des circonstances locales plus que sur l'irrégularité de la terre, on les a attribuées à l'attraction latérale des montagnes sur le fil à plomb des instrumens qui ont servi à déterminer l'amplitude de l'arc céleste de ces mesures. Il n'est pas même nécessaire de supposer pour cet effet de grandes masses de montagnes, il suffit de supposer un défaut d'homogénéité dans les couches intérieures de la terre, qui avoisinent le point où l'on

(1) Voyez ma correspondance astronomique et géographique, vol. IV, pag. 125.

a observé la latitude (1) BOUGUER et LA-CONDAMINE ont trouvé par exemple, dans leur mesure de degré au Pérou, que leur fil à plomb avait été détourné de 8 secondes de son vrai zénith par la masse du Chimboraco, cependant d'après la masse énorme de cette montagne, et selon les loix de l'attraction cette déviation aurait dû être treize fois plus forte ; elle était moindre, probablement parce que cette montagne, qui est un volcan, était creusée par l'action des feux souterrains et par les fréquentes éruptions.

Le Docteur MASKELYNE a éprouvé par des observations plus directes dans les petites montagnes de l'Ecosse, une attraction du fil à plomb de 5,″ 8 (2).

M.r MUDGE dans la mesure des degrés, exécutée dernièrement en Angleterre (3) attribue à son fil à plomb une déviation de 8 à 10 secondes à *Cliston*, dans une contrée où les montagnes ne s'élèvent pas même à la hauteur de 500 toises, tandis que le Chimboraco à une élévation de 3000 toises, n'a produit que 7 secondes et demie.

---

(1) *Newton* attribuait les différences irrégulières dans les expériences du pendule simple à cette même cause, „ *et hæc discrepantia partim a dissimilitudine partium internarum terræ ... oriri potuit* „ Philos. nat. princip. mathem., lib. III, prop. XX.

(2) Philos. transact. of the R. S. London 1775, pag. 500.

(3) Philos. transact. of the Roy. Society. London 1803, part. II, pag. 383, seq.

Enfin feu M.r Méchain dans ses opérations en Espagne trouve un fait bien plus extraordinaire. A une petite distance de 950 toises entre Barcelone et le fort Montjouy, il trouve une différence des latitudes observées dans ces deux endroits avec le plus grand soin, de 3 secondes plus grandes, que ne la donne la mesure géodésique très-exacte de cette distance. Comment expliquer cette singulière différence, qui a fait le tourment de Méchain jusqu'à la fin de ses jours? Barcelone est au bord de la mer, et le fort n'est que sur une hauteur de 80 toises! Il ne reste d'autre explication que celle que nous venons de rapporter, et M.r Delambre tout comme les autres est obligé d'y avoir recours. (1) » On serait donc obligé, (dit-il, pag. » 618) d'imaginer dans l'intérieur de la terre, des » masses d'une densité très-inégale à Barcelone et à » Montjouy : rien ne s'y oppose, mais cette explication » ne serait qu'une hypothèse dont il serait impossible » de prouver la vérité. Il en résulterait qu'on ne » pourrait plus compter à 2 ou 3 secondes près sur » aucune latitude, et qu'il ne faudrait plus s'étonner » des différences de quelques toises, qu'on remarque » dans les degrés mesurés. »

Si ces réflexions sont fondées sur des observations incontestables, il en résulterait encore que les mesures

---

(1) **Base du système métrique décimal, tom. II.**

des degrés ne sont nullement propres à nous faire connaître la vraie figure de la terre; aussi M.r LEGENDRE dans son Mémoire sur les Comètes (1) à la suite de ses recherches sur les degrés mesurés en France, tire tout nettement la conclusion, qu'à cause de l'existence bien constatée de ces dérangemens irréguliers du fil à plomb » *La longueur des arcs du Méridien est moins propre, que celle du pendule à la détermination d'une mesure universelle.* »

Mais ne serait-il pas injuste et de mauvaise foi de vouloir rejeter toutes les fautes sur une hypothèse, dont (comme le remarque fort bien M.r DELAMBRE) il serait impossible de prouver la vérité? On conviendra donc sans peine qu'il faut aussi attribuer une partie de ces erreurs aux observateurs, et surtout aux instrumens dont ils se sont servis, et dont la perfection n'a pas toujours été suffisante pour constater des élémens aussi délicats. L'habileté, la dextérité, l'habitude de ceux qui maniaient ces instrumens, ne doivent-elles pas entrer pour quelque chose dans cette ligne de compte? Ceux qui se sont mêlés de mesurer des degrés, n'étaient pas toujours des observateurs très-adroits et très-exercés; on pourrait même prouver que la plupart, en travaillant à cette opération, y ont fait leur premier aprentissage, et que plusieurs d'en-

---

(1) Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1805, pag. 80.

tr'eux s'en acquittèrent assez mal, comme nous allons voir.

Ayant eu occasion en 1803 d'examiner de plus près la mesure du degré, entreprise en 1762 et 1763 par ordre de l'Impératrice Marie-Thérèse, en Autriche et en Hongrie par le Jésuite Liesganig, je ne fus pas peu surpris d'y rencontrer des fautes très-graves, que personne n'avait remarquées ou relevées jusqu'à présent. J'ai d'abord trouvé que cet Astronome en prenant avec son secteur les distances des étoiles au zénith pour déterminer l'amplitude céleste de son arc mesuré, s'était trompé d'étoile. En 1762 il crut observer au mois de juin à Brün en Moravie, au mois de septembre à Gratz en Stirie, en 1763 en juillet et en août à Vienne l'étoile μ du Dragon, comme on trouve ces observations consignées dans son ouvrage « *Dimensio Graduum Meridiani Viennensis et Hungarici. Vindobonæ* 1770. Cependant c'était un autre astre, c'était en réalité l'étoile z d'Hercule qu'il avait observée sans s'en douter, distante de l'autre de 8 degrés en ascension droite, et de 9 degrés en déclinaison. J'ai trouvé en second lieu que le P. Liesganig s'est encore trompé dans le calcul de ces étoiles observées, en y appliquant les effets de la précession, de l'aberration et de la nutation avec des signes contraires à ceux que ces corrections devaient avoir, comme cela lui est arrivé notamment à Vienne avec l'étoile β du Cocher, et en Hongrie avec les étoiles α et δ du Cygne, et comme je l'ai amplement

prouvé et démontré dans ma *Correspondance Astronomique et Géographique*, *Vol. VIII*, *pag.* 507, *et Vol. IX*, *pag.* 32 *et* 120. Les anomalies de ses différentes observations de l'amplitude de l'arc céleste vont jusqu'à 12 secondes, et comme son degré d'Autriche ne s'accorde pas avec celui de Hongrie, et avec les degrés mesurés dans d'autres lieux, il ne manque pas d'en rejeter la faute sur la grande chaîne des montagnes de la Stirie. Cependant comment expliquer une erreur de quatre secondes sur la latitude de son observatoire à Vienne? Les attractions n'y avaient aucune part. Le P. LIESGANIG avait observé pendant six ans, depuis 1758 jusqu'en 1763 avec son secteur de 10 pieds la latitude de son observatoire, et il l'avait trouvé de 48° 12′ 36″; cependant en 1808 elle fut observée avec un excellent cercle répétiteur de REICHENBACH par 472 observations = 48° 12′ 40″, donc il y a une différence de 4 secondes. (1)

A Brün, à l'une des extrêmités de la mesure du degré, le P. LIESGANIG avait déterminé la latitude de ce point important avec le même secteur 49° 11′ 28″. En 1807 on a trouvé avec un cercle répétiteur 49° 11′ 38″. Différence de 10 secondes. (2)

Il résulte donc de toutes ces erreurs et anomalies bien constatées, que la mesure des degrés du P. LIÉSGANIG

(1) Ma corresp. astr. et géogr. 1808, vol. XVIII, pag. 112.
(2) Ibidem pag. 115.

ne mérite aucune confiance, et n'est nullement propre à nous faire connaître les dimensions et la figure de la terre.

Mais ce n'est pas uniquement dans la partie astronomique de cette mesure, que le P. LIESGANIG a commis des erreurs assez graves, on en a trouvé de plus fortes encore dans la partie géodésique. A l'occasion d'une nouvelle levée générale de la carte de tous les pays de la Monarchie Autrichienne, ordonnée en 1807, on a découvert, que dans les opérations trigonométriques le P. LIESGANIG s'est encore trompé de signal, en prenant une chapelle sur le sommet d'une montagne pour une autre. C'est dans le Triangle *Urban*, *Wildon* et *Chapelle S.te-Magdelaine*, que ce *quid pro quo* a eu lieu, car il est avéré que de la station *Wildon* il est de toute impossibilité d'apercevoir la Chapelle de S.te-Magdelaine, puisque d'autres montagnes la couvrent. Cette méprise a produit, sur la totalité de cette mesure, une erreur de 4533 toises, car au lieu de placer l'Eglise des Jésuites de la ville de Varasdin à 1422 toises à l'Ouest du Méridien de Vienne, comme cela doit être, elle la transporte à 3111 toises à l'Est. La mesure du P. LIESGANIG ne peut donc plus être qualifiée de mesure des Degrés, et il faut la rayer de ce nombre.

On a jeté quelques doutes sur les degrés mesurés sous l'Equateur, sur-tout sur les observations astronomiques de l'amplitude de l'arc céleste. On y a remarqué des anomalies de 30 à 40 secondes, et des diffé-

rences d'un jour à l'autre de 9 à 10 secondes au même secteur, dans sa même position, sans qu'il ait changé de place. (1) Les différens observateurs ont été d'assez bonne foi pour l'avouer ingénument. L'observateur espagnol DON JUAN dit ouvertement dans le II vol. de son voyage, pag. 229: « Pour moi, loin d'avoir une » pareille imagination, je dis, qu'il est aisé que dans » les observations astronomiques il se glisse une erreur » de 6 ou de 8 secondes, soit par l'opération même » de l'observateur, et plus encore par l'impossibilité » de rectifier l'instrument à un certain point; mais en » revanche je suis persuadé, vu la délicatesse de nos » opérations que l'erreur ne peut aller au-delà. » DON JUAN admet donc la possibilité d'une erreur de 8″. Les Académiciens Français MM. BOUGUER et LA-CONDAMINE font la même profession; ils rejettent une grande quantité, ou pour mieux dire, la plus grande partie de leurs observations, comme mauvaises, suspectes ou douteuses. Par exemple, les observations de l'étoile ε d'Orion, faites à *Quito* par GODIN et LA-CONDAMINE en 1737, 1740, 1741, 1742, avec un secteur de 12 pieds apporté de France, sont rejetées comme absolument *mauvaises*.

Les observations de la même étoile faites à *Tarqui* en 1739 et 1740 conjointement par BOUGUER et LA-

(1) Ma correspond. astr. et géogr. 1805, vol. XII, pag. 430, 431.

Condamine sont condamnées par ce dernier comme *erronées*.

Les observations faites en 1740 à *Cotesqui*, à l'autre extrémité de l'arc par ces mêmes Académiciens, sont encore déclarées *douteuses*.

Ils reprirent chacun séparément les observations de cette même étoile en 1741, 1742 et 1743. Bouguer fut en 1741 tout seul à *Tarqui*, il y fit cinq séries d'observations depuis le 5 mars jusqu'au 3 décembre. Il y démonta deux fois le secteur, y fit plusieurs changemens, y ajouta des supports etc. . . . . le résultat fut, que toutes ces observations ont été qualifiées *suspectes*.

En 1742 M.r Bouguer se transporta avec son secteur à *Cotesqui* à l'autre extrémité de l'arc, espérant d'y être plus heureux. Il y fit quarante observations de la distance au zénith de ε d'Orion, depuis le 9 août jusqu'au 2 janvier 1743. Il y démonta encore deux fois son secteur, changea l'objectif, mit de nouveaux fils au micromètre, traça un nouvel arc de division, etc. . . . . le résultat fut, que de *quarante* observations de cette étoile, et de *huit* qu'il y fit en 1741 au mois de juillet et août, il n'en conserva et déclara bonnes que les *douze* dernières, qui avaient été prises simultanément avec M.r De-La-Condamine, qui observait la même étoile à *Tarqui*. Aussi M.r Bouguer ne rapporte-t-il dans son livre de la *Figure de la terre*, que ces douze observations, auxquelles il s'en tient,

et nous devons la connaissance des autres à M.[r] DE LA-CONDAMINE qui les rapporte dans son ouvrage, *Mesure des trois premiers degrés du Méridien.*

Pendant que BOUGUER travaillait à *Cotesqui*, LA-CONDAMINE faisait de son côté tous ses efforts à *Tarqui* pour coopérer par ses observations simultanées à la détermination de la vraie amplitude de l'arc céleste. Il ne fut pas plus heureux que BOUGUER. Il rejette d'abord toutes ses observations faites en 1742, et ne s'arrête que sur ses dix-neuf dernières observations simultanées faites en 1743.

Donc, toutes les opérations astronomiques faites au Pérou depuis 1737 jusqu'en 1743 se réduisent à *douze* observations de la distance au zénith de l'étoile ε d'Orion faites en 1743 par BOUGUER à *Cotesqui*, à l'une des extrémités de l'arc mesuré, et à *dix-neuf* observations de la même étoile, faites dans la même année par LA-CONDAMINE à *Tarqui*, tout le reste n'était que des essais avortés et infructueux.

On pourrait encore demander, si l'on doit accorder la dernière confiance à ces dernières observations adoptées comme bonnes par ces deux Académiciens. C'est ce que nous ne déciderons pas, nous ne nous permettons que cette seule réflexion, que ces observations pour un objet aussi important et aussi délicat, sont en bien petit nombre, car à la rigueur elles se réduisent à *six* observations faites à une extrémité de l'arc céleste, et à *dix* faites à l'autre. Il n'y a à *Cotesqui* que

cinq observations, le limbe du secteur tourné à l'Orient, et *sept*, le limbe tourné à l'Occident, il n'y a donc tout au plus que *six* observations, qui établissent la distance apparente au zénith de l'étoile ε d'Orion à *Cotesqui*.

De l'autre côté, il n'y a à *Tarqui* que *neuf* observations, le limbe du secteur tourné vers l'Est, et *dix* le limbe tourné à l'Ouest, ce qui ne fait à la rigueur que *dix* observations pour la distance apparente de de l'étoile à *Tarqui*. Ainsi tout l'arc céleste conclu pour la mesure des degrés à l'Équateur, ne repose que sur *six* observations faites à une extrémité et sur *dix* à l'autre.

Mais ce qui est plus important, et qui tire plus à conséquence, puisque le degré à l'Équateur a servi de terme de comparaison à ceux déterminés dernièrement en France, c'est qu'on en a tiré, comme on sait, définitivement l'aplatissement de la terre de $\frac{1}{334}$, et qu'il est la base de tout le système métrique décimal, c'est que BOUGUER et LA-CONDAMINE ont commis la même faute que le P. LIESGANIG, en appliquant à leurs observations les effets de l'aberration et de la nutation avec des signes contraires, (1) ce qui double l'erreur.

Ayant refait les calculs de ces observations avouées et reconnues pour bonnes, et après y avoir appliqué les véritables effets de la précession, aberration et

(1) Voyez ma corresp. astr. et géogr. 1808, vol. XVIII, pag. 47.

nutation selon les données les plus récentes, j'ai trouvé que la vraie amplitude de l'arc céleste entre *Tarqui* et *Cotesqui* était de 3° 7′ 4″, 563, au lieu de 3° 7′ 0″, 9 que LA-CONDAMINE avait trouvé (1), d'où j'ai enfin conclu, que le véritable degré à l'Équateur réduit au niveau de la mer était de 56731, 04 toises, au lieu de 56753 ^{t}, qu'on avait adopté pour ce degré. Partant de cette donnée, je trouve un aplatissement de la terre de $\frac{1}{310}$, qui satisfait également au degré sous l'Équateur, à celui du pôle mesuré par M.r SVANBERG, et aux degrés mesurés dernièrement en France et en Angleterre, comme on voit dans le tableau suivant :

DEGRÉS.	LATITUDES.	MESURES actuelles.	Dans l'hypoth. de l'aplatiss. $\frac{1}{310}$	DIFFÉRENCE.
A l'Equateur .	0° 0′ 0″	56731^T, 7	56729^T, 2	—2^T, 5
En France . .	45 0 0	57007, 7	57006, 8	—0, 9
En France . .	46 11 58	57018, 4	57018, 4	0, 0
En Angleterre	52 2 20	57068, 7	57074, 3	+5, 6
En Suède . .	66 20 12	57192, 7	57194, 9	+2, 2

J'ai donné toutes les dimensions de cette ellipsoïde terrestre à la suite de mes *tables abrégées et portatives du Soleil*, pag. 58, que j'ai publié en 1809 à Florence chez Molini. D'après cette hypothèse le rayon de l'Equa-

(1) Ma corresp. astr. et géogr. 1807, vol. XVI, pag. 317.

teur terrestre serait de 3271558 toises, celui du pôle 3261005 toises. Le degré de latitude à une latitude quelconque $\lambda =$

$$57006^{T},8 - 277^{T},617 \cos. 2\lambda$$

ou $$\frac{56731^{T},7}{\sqrt{(1-0,006441206 \sin^2 \lambda)^3}}$$

On a conçu des doutes plus forts encore sur le degré mesuré sous le cercle polaire par MAUPERTUIS, CLAIRAUT, LE-MONNIER, OTHIER et CELSIUS. La nouvelle mesure de ce degré exécutée en 1801—1803 par SVANBERG, OFVERBOM, HOLMQUIST et PALANDER a prouvé qu'ils étaient fondés; ils ont trouvé à leur grand étonnement leur degré plus petit de 223 toises que celui de MAUPERTUIS. (1) Il est difficile d'assigner la cause, ou de remonter à la source d'une si grande erreur. Les signaux, les termes de la base de MAUPERTUIS n'existent plus, l'amplitude de l'arc céleste n'est plus la même, celle de MAUPERTUIS n'était que de 57′ 23″, celle de SVANBERG 1° 37′ 19″. L'Académicien Suédois cherche, et avec raison, l'erreur principale dans les observations au secteur; effectivement il suffit de supposer une erreur de 7 secondes à chaque extrémité de l'arc pour

(1) Expositions des opérations faites en Laponie pour la détermination d'un arc du méridien en 1801, 1802 et 1803 par MM. Ofverbom, Svanberg, Holmquist et Palander etc. .... rédigée par Jons Svanberg. Stockholm 1805. dans la préface. — Ma corresp. astr. et géogr. 1805, vol. XII, pag. 429.

expliquer toute la différence, erreur, comme nous avons vu, très-possible, et même assez probable.

On a conçu de meilleures espérances des mesures des degrés entreprises dans les derniers tems en France, en Angleterre et dans les Indes Orientales, avec des instrumens plus parfaits, avec des cercles répétiteurs, et par des astronomes consommés dans la pratique des observations les plus délicates. La France surtout nous a donné l'exemple d'une mesure, qui lui assure la supériorité sur tout ce qui avait été entrepris dans ce genre jusqu'à présent tant pour la grandeur de l'entreprise, que pour son exécution dirigée et conduite par les Géomètres et les Astronomes les plus savans et les plus habiles de l'Europe. Les résultats en sont connus à tout l'Univers. Mais ce qui est cependant très-remarquable, c'est que si l'on s'en tenait à ces seules mesures, on trouverait avec LA-PLACE (1) et avec LEGENDRE (2) un aplatissement de la terre de $\frac{1}{150}$ ou $\frac{1}{148}$; ellipticité absolument incompatible avec ce qu'on connaît par d'autres mesures, et par d'autres phénomènes. Mais ce qui est bien plus extraordinaire encore, c'est qu'en se tenant uniquement aux mesures exécutées dernièrement en Angleterre, on trouverait pour l'aplatissement $\frac{1}{35}$ (3), aplatissement qui ne peut

(1) Mécanique céleste, vol. II, pag. 143.

(2) Nouvelles méthodes etc., pag. 78.

(3) Ma corresp. astr. et géogr., vol. XIV, pag. 142.

subsister ni avec les autres mesures, ni avec les phénomènes de la pesanteur, lesquels, comme on sait, ne permettent pas de supposer à la terre un aplatissement au-dessus de $\frac{1}{250}$.

Le Comte LA-PLACE pense par conséquent (1) qu'un aplatissement aussi considérable ne dépend point des attractions des Pyrénées et d'autres montagnes situées au Midi de la France, mais qu'il tient à des attractions beaucoup plus étendues, dont l'effet est sensible au Nord de la France, et même en Angleterre. M.r LEGENDRE croit, que ces aplatissemens considérables et locaux tiennent à des attractions locales qui agissent irrégulièrement sur le fil à plomb et qui rapprochent le zénith apparent du Midi ou du Nord, tout comme la même cause peut aussi le détourner de quelques secondes vers l'Est ou vers l'Ouest, ce qui expliquerait les inégalités qu'on a cru remarquer dans les observations des Azimuths.

Cependant pour s'assurer de la grandeur et des limites de ces erreurs, M.r LEGENDRE eut l'idée ingénieuse d'appliquer à ces mesures sa nouvelle méthode, qu'il appelle la *méthode des moindres quarrés*, cette méthode qu'il a développée dans son Mémoire sur les Comètes cité plus haut, consiste à rendre *minimum* la somme des quarrés des erreurs, par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre, qui

(1) Mécanique céleste, vol. II, pag. 143, 144.

empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité. (1)

M.r LEGENDRE suppose l'aplatissement de $\frac{1}{320}$ tel qu'il est donné par la longueur du pendule, et par quelques phénomènes astronomiques; il suppose ensuite dans les latitudes observées des erreurs qu'il détermine par sa méthode, et il trouve que toutes les mesures faites en dernier lieu en France s'accorderaient parfaitement avec son ellipse, en admettant les erreurs suivantes sur les différentes latitudes observées. A Dunkerque +3″,06, à Paris 0″,00, à Evaux—5″,83, à Carcassonne—0″,88, à Montjouy + 3″,62. La plus grande erreur tombe sur la latitude d'Evaux, la moindre, qui est même entièrement nulle, sur celle de Paris, où plusieurs observateurs ont fait le plus grand nombre d'observations, avec plusieurs instrumens et à plusieurs reprises. Il est remarquable que l'erreur sur la latitude de Montjouy soit précisément de 3″. En appliquant ces mêmes principes et calculs aux mesures exécutées en Angleterre, on trouvera les erreurs probables sur les différentes latitudes observées. A Cliston — 1″,8, à Arbury—Hill + 2″,5, à Greenwich + 1″,1, à Dunrose—1″,7,

(1) Le célèbre Docteur *Gauss*, était déjà depuis 1795 en possession de cette méthode, et il s'en est servi avec avantage dans la détermination des élémens des orbites elliptiques des quatre nouvelles planètes, comme on peut voir dans son bel ouvrage. *Theoria motus corporum celestium in sectionibus conicis Solem ambientium.* Hamburgi, 1809, pag. 221.

La grande difficulté roule maintenant sur cette question : les erreurs qu'on vient de déterminer, sont-elles purement l'effet des attractions locales, et des dérangemens du fil à plomb, ou de la liqueur dans les niveaux, ou est-il encore permis d'en rejeter une partie, ou peut-être le tout sur les observations? Est-il possible, que dans l'état actuel de l'Astronomie pratique avec des instrumens aussi parfaits que ceux que nous possédons, tels que les cercles répétiteurs, avec des méthodes d'observation, et des théories de calcul aussi perfectionnées, avec des observateurs si adroits, si exercés, avec des observations si multipliées, on puisse commettre encore des erreurs de 4 à 5 secondes?

Certes, cette question est bien difficile et même pénible à décider, car si elle l'est affirmativement, il en résulterait la certitude fâcheuse que tous les travaux qui ont été entrepris jusqu'à présent pour connaître la figure de la terre avec une très-grande précision, n'ont point atteint leur but; qu'il faudrait renoncer à ces recherches coûteuses, et s'en tenir à ce que les phénomènes de la pesanteur universelle nous offrent dans des limites plus resserrées.

Après une pratique constante et suivie de près de 30 ans, et l'usage journalier des meilleurs instrumens qui soient sortis des mains des plus habiles artistes d'Angleterre, de France et d'Allemagne, je suis bien loin encore de croire, que ces instrumens aient atteint leur dernier degré de perfection, et puissent nous

donner, à ne pas en douter, une latitude à 2 ou 3 secondes près, même dans les circonstances les plus favorables. La série la plus longue d'observations, toutes parfaitement d'accord entr'elles, ne prouvent pas encore la bonté absolue de ces observations. Une cause constante et permanente dans un instrument peut agir et affecter toujours de la même manière toutes les observations, et toujours reproduire les mêmes erreurs, de même, qu'un accord parfait des observations avec une hypothèse quelconque ne prouve pas toujours ni la vérité de l'hypothèse, ni l'exactitude des observations, puisque, comme l'on sait, la féconde analyse présente une foule de moyens, (et on en a si souvent abusé) de trouver une loi quelconque, à laquelle on peut adapter une série donnée d'observations. J'ai éprouvé la vérité de ce que j'avance ici d'une manière frappante en dernier lieu, et comme ce fait mérite la plus grande attention des Astronomes, et qu'il vient à l'appui de mes considérations, je m'en vais le rapporter ici.

Étant en 1809 à Milan, j'y ai observé la latitude de l'observatoire de Brera avec deux cercles-répétiteurs de la plus grande perfection, construits par M.r Reichenbach à Munich. 300 Observations bien d'accord de la Polaire à son passage supérieur et inférieur, prises à l'un de ces cercles, me donnèrent la latitude avec la plus grande précision. 170 Observations de la même étoile également d'accord entr'elles, et prises avec le

second cercle me donnèrent constamment une latitude moindre de 2″,82. Ce n'est pas ici le lieu de discuter ce fait extraordinaire, je donnerai dans un autre tems les détails de ces observations aussi intéressantes que curieuses, il suffit pour mon objet présent d'avoir dénoncé ce fait incontestable, dont les Astronomes célèbres de Brera ont été témoins. Je n'ajoute qu'une seule remarque. L'un des cercles était muni d'un excellent niveau de la plus grande sensibilité, une division de son échelle à-peu-près d'une ligne du pied de Paris répondait à 0″,8, au lieu que dans le second cercle le niveau était beaucoup moins sensible, et une division d'une ligne de son échelle répondait à 4 secondes. Dans tout le cours de ces observations, c'étaient toujours les mêmes personnes qui les firent, ce fut moi qui observai, et mon secrétaire, jeune homme très-adroit et rompu à cette besogne, tint le niveau.

Nous savons, combien la différence de 3 secondes sur la latitude de Barcelone ou de Montjouy ont donné d'inquiétudes à Méchain (1), ce qui lui fit vivement désirer d'y retourner et d'aller la vérifier, il voulait y porter *deux* cercles, et dans une lettre écrite de S.t-Pons le 15 vendémiaire an VII, il dit » *Je sais bien ce qu'il faudrait faire pour écarter plusieurs causes d'erreurs et d'incertitude.* »

---

(1) Base métrique, vol. II, pag. 627.

Quoiqu'il en soit, on voit d'après ce qu'on vient de lire, que la question est toujours indécise. Les anomalies, les incohérences, les incompatibilités qu'on trouve dans les mesures des degrés, sont-elles dûes à l'imperfection des observations astronomiques jusqu'à un certain point; ou à l'irrégularité de la surface de la terre, aux densités inégales dans l'intérieur de notre globe, et par conséquent aux dérangemens irréguliers des fils à plomb ou des liqueurs des niveaux? Questions bien délicates et bien difficiles à résoudre! Tout ce que nous en savons, c'est que nous sommes positivement dans ces incertitudes.

Etant venu en 1808 en Italie avec un excellent cercle répétiteur de Reichenbach, curieux de savoir comment s'accorderait le degré du P. Boscovich mesuré depuis *Rome* jusqu'à *Rimini*, avec l'hypothèse de l'aplatissement de la terre de $\frac{1}{310}$, je m'étais proposé d'en refaire toute la partie astronomique, d'observer les latitudes de Rome et de Rimini, et les Azimuths, qui ont servi à orienter le réseau des triangles de cette mesure. La guerre, des troubles, et d'autres circonstances m'ont empêché d'aller à Rome, en attendant j'étais à Rimini, où j'ai répété dans la maison du Comte *Garampi*, dans le même local, où le P. Boscovich avait observé avec son secteur de 12 pieds, l'observation de la latitude que j'ai trouvée par 110 Observations de la Polaire 44.° 3',45",38, c'est-à-dire 5",38 plus grande que ne l'avait déterminé le P. Boscovich. Quant à

l'Azimuth du *Monte Luro*, je l'ai trouvé 51",37 plus petit que celui observé et employé par cet Astronome. Les deux habiles astronomes du collége romain à Rome MM. Calandrelli et Conti ont travaillé depuis long tems à s'assurer de la vraie latitude de leur observatoire. Ils l'ont d'abord observée dans le même local et avec le même secteur de Boscovich, et ils ont trouvé comme lui la latitude 41.° 53',54" (1). En 1807 et 1808 ils observèrent cette latitude avec un cercle-répétiteur de 19 pouces fait à Paris par Bellet, et la trouvèrent par 358 observations de la Polaire au-dessus et au-dessous du Pôle = 41.° 53',55",78 (2); ils s'arrêtent à la fixer par un milieu à 41.° 53',54",98. Il y a donc lieu de croire que la latitude de Rome au collége romain, est aussi bien établie, qu'on peut la désirer. Nous avons trouvé à Rimini dans la maison du Comte *Garampi*, 44.° 3',45",38, donc l'amplitude de l'arc céleste entre Rome et Rimini serait = 2.° 9',50",40 plus grande de 4",4 que celle déterminée par Boscovich. Cet Astronome rapporte dans son ouvrage *Expeditio litteraria* etc. . . . que d'après ses mesures géodésiques, il avait trouvé l'arc terrestre du méridien entre ces deux points de 161253,6 pas romains, donc le degré

(1) Opuscoli astronomici, e fisici. Roma 1803, pag. 42.

(2) Opuscoli astronomici di Giuseppe Calandrelli, e Andrea Conti, Professori nell' Università Gregoriana del collegio Romano; e direttori dell' osservatorio. Roma 1808, pag. 233.

du méridien à la latitude de 43.° serait de 56941,4 toises de Paris. Calculant ce degré dans notre hypothèse d'aplatissement de $\frac{1}{310}$, on le trouvera de 56987,5 toises par conséquent l'erreur de l'hypothèse ou de la mesure = 46 toises.

Si ces résultats se confirment, il faudra conclure, ou que la mesure de l'arc céleste n'est pas tout à fait juste, ou que la mesure des triangles entre Rome et Rimini faite par Boscovich n'est pas exacte, ou qu'il y a encore ici des attractions occultes, sur lesquelles, en attendant mieux, on peut paisiblement tout rejeter; tout ce qu'il y a de bien certain, c'est que ce degré du méridien à 43.° de latitude, tel qu'il résulte de ces mesures, ne s'accorde pas avec le degré mesuré en France sous cette même latitude, ni avec ceux mesurés à l'Equateur, en Angleterre et en Suède.

De tous les degrés mesurés jusqu'à présent il n'en est aucun sur lequel on ait élevé autant de doutes, que sur celui mesuré en Piémont par le P. Beccaria. Aussi l'anomalie qu'on y a remarqué monte jusqu'à l'énorme différence de 900 toises. Voila pourquoi le comte La-Place (1) et d'autres géomètres (2) l'ont toujours exclu de leurs recherches sur l'ellipse la plus probable qui résulte de ces mesures. On n'a pas manqué

---

(1) Mecan. cél. vol. II, pag. 138.
(2) Ma corresp. astron. et géogr. 1806. Vol. XIV pag. 130.

d'accuser le *Mont-Rosa*, que BECCARIA regarde comme la plus haute montagne de l'Europe, et de lui attribuer un dérangement du fil à plomb de 26 secondes.

Ayant passé vers la fin du mois de septembre 1809 par Turin, et y ayant été favorablement accueilli par plusieurs Membres de l'illustre Académie Impériale des Sciences de cette ville, surtout par le Recteur de l'Université M.r DE-BALBE et le Secrétaire perpétuel de l'Académie M.r VASSALLI-EANDI, les ayant informés de mon intention de répéter l'observation de la latitude de Turin et des Azimuths que le P. BECCARIA y avait observés pour orienter sa série des triangles pour la mesure du degré; ces Messieurs toujours disposés à favoriser tout ce qui peut contribuer à l'avancement des Sciences, dont ils s'occupent eux-mêmes avec tant de succès, s'empressèrent de me prêter tous les secours, et de m'en faciliter tous les moyens. Ils mirent de suite, dans l'absence de l'Astronome, l'observatoire à ma disposition, et j'y ai commencé mes travaux le lendemain de mon arrivée le 29 septembre. Que puis-je faire de mieux, que de les offrir et de les soumettre au jugement de cette même Académie, qui les a si bien encouragés et protégés? Elle me permettra donc, non pas de lui offrir de simples résultats, mais de lui exposer tous les détails de mes opérations, de mettre sous ses yeux tous les élémens d'observation, et de calcul, qui m'ont conduit aux résultats que j'aurai l'honneur de *lui* présenter, afin qu'*elle* puisse juger par

elle-même et avec connaissances de causes d'un objet d'une nature aussi délicate.

Je commencerai d'abord par exposer les moyens et les instrumens, qui ont été à ma disposition pour toutes ces opérations.

1.° Pour faire l'observation de latitude, j'avais apporté avec moi un cercle répétiteur de REICHENBACH de 12 pouces de diamètre. On peut réellement qualifier cet instrument de merveilleux, il surpasse à mon avis en exactitude, en commodité, et même en beauté, tout ce que je connais de mieux fait en ce genre d'ouvrages soit à Paris, soit à Londres.

Quoique ce cercle n'ait qu'un pied de diamètre, cependant chacun de ses quatre verniers donne immédiatement la lecture de 4″ de la division, et quoique ces divisions soient d'une ténuité extrême, on les apperçoit néanmoins à l'aide d'une loupe avec autant de clarté que de netteté, de sorte que l'on peut, sans craindre de se tromper, juger 2″ par la non-coïncidence de deux traits du vernier en deçà et en de-là.

Les quatre verniers placés à angles droits, ne sont point portés, comme à l'ordinaire, par des alidades, qui parcourent le limbe de l'instrument, sur lequel elles glissent, ils sont au contraire portés par un cercle entier emboîté dans le cercle qui porte la division, de sorte que les divisions des quatre verniers, sont à fleur de celles du limbe, et ne présentent que des traits tracés sur un même plan, ce qui non-seulement

exclut toute parallaxe optique à la lecture des divisions, mais fait juger de la coïncidence des verniers avec les traits du limbe avec une précision vraiment admirable. Les verniers ne touchent par conséquent jamais les divisions du limbe, il y a même un interstice presque imperceptibe entre le *cercle-limbe* et le *cercle-vernier*, au travers duquel on voit un filet de lumière, lorsqu'on présente le plan du cercle au jour, l'œil peut fort bien distinguer et juger l'égalité parfaite de ce trait circulaire de lumière, qui entoure la séparation du *cercle-limbe* et du *cercle-vernier* emboîté. Rien de plus étonnant que de voir la finesse et l'égalité parfaite de cette couronne lumineuse.

Les divisions soit du limbe, soit des verniers sont gravées sur une plaque d'argent; et présentent sur ce fond blanc des traits noirs très-prononcés aussi faciles à distinguer et à lire pendant le jour, que pendant la nuit à l'aide d'une loupe et d'un illuminateur très-simple fait de papier huilé, qui réfléchit une lumière matte soit du jour, soit de la bougie sur ces divisions.

Mais ce qui mérite d'être admiré le plus, est que les quatre verniers placés d'une manière quelconque n'indiquent aucune excentricité, lorsque l'instrument a partout la même température, ce dont il est facile de se convaincre, en plaçant les verniers sur divers points du limbe, et en les lisant tous les quatre. L'on ne trouvera jamais plus de 2″ de différence, ce que l'on peut tout aussi bien attribuer à la différence de l'éclai-

rage et des lectures de ces verniers, qu'à l'expansion du limbe.

Cette admirable précision est dûe d'abord à une nouvelle machine à diviser de l'invention de M.r REICHENBACH, construite sur de nouveaux principes totalement différens de ceux de la célèbre machine de l'artiste Anglais M.r RAMSDEN.

Une cause essentielle qui fait que les divisions de M.r REICHENBACH sont d'une justesse aussi merveilleuse, et qu'elles la conservent toujours, consiste dans un principe de cet artiste, savoir, que les instrumens à divisions doivent nécessairement être tous *d'une seule pièce*, effectivement les cercles-répétiteurs de M.r REICHENBACH, sont d'un seul jet, ils sont tous coulés d'une seule fonte, comme le serait un canon, on n'y voit point de charpentage, ni assemblage de pièces rapportées, soudées, ou vissées, comme on les voit aux instrumens Anglais ou Français. On ne voit pas une seule vis à tout ce qui porte division soit au *cercle-limbe*, soit au *cercle-vernier*, et celles qu'on y trouve en très-petit nombre ne sont que des accessoires indispensables pour attacher les loupes, les niveaux, les vis à caler, qui n'ont aucun rapport aux communications avec le *cercle-limbe* ou *cercle-vernier*. On obtient par là une homogéneité et uniformité d'expansion du métal, qui n'a pas lieu dans les pièces rapportées, qui ne font point corps, et qui par conséquent ne transmettent pas instantanément, et avec une certaine

égalité la température au métal. J'ai vu faire à ce sujet à M.r Reichenbach à Munich des expériences très-ingénieuses et très-intéressantes sur la dilatation, l'expansion et la flexion des métaux de fonte d'une seule pièce, et de différentes pièces rapportées, soudées et vissées, mais ces expériences curieuses seraient trop longues et hors de propos à rapporter ici, je n'en indiquerai qu'une seule facile à répéter sur tous les cercles de Reichenbach. On place les quatre verniers sur un nombre rond quelconque de la division de l'instrument ; dans le voisinage d'un des verniers on n'a qu'à toucher avec la paume de la main le *cercle-limbé* pendant une ou deux minutes (selon la saison et la température de la main) de suite le vernier en sera sensiblement affecté, et s'écartera de la position dans laquelle on l'avait mis, tandis que les trois autres verniers auront conservé leur position. Cette expérience devient plus sensible en exposant un des verniers aux rayons du soleil, et en tenant les trois autres à l'ombre, le vernier de la partie échauffée indique tout de suite, ainsi qu'un thermomètre, la dilatation du métal, et ne répond plus à la division, sur laquelle on l'a placé avant l'expérience, tandis que les trois verniers restés à l'ombre, conservent leur ancienne position; les quatre verniers se rétablissent au même point, dès que tout le cercle a repris une même et égale température. Aussi avant de commencer les observations soit du soleil, soit des étoiles, j'ai toujours soin d'exposer

l'instrument un quart d'heure ou une demi heure avant aux rayons du soleil, ou au grand air, afin que le cercle acquière dans toutes ses parties la même température.

On voit, combien cette justesse et cette finesse de division combinée avec le beau principe de répétition de Borda, doivent contribuer à donner la dernière précision aux angles multipliés avec un tel instrument, aussi une multiplication de dix ou de vingt fois ne donne guère d'autres résultats qu'une multiplication de 50 ou 60 fois; ajoutez à cela la douceur et la commodité des mouvemens prompts et lents. Nulle part des engrainages, des vis sans fin, des roues dentées et pignons; tous les mouvemens quelconques soit du cercle-limbe, soit du cercle-vernier, soit enfin des lunettes ou des niveaux, s'opèrent par des vis d'acier à matrice et à pas fins, de là point de soubresauts, point de secousses dans l'instrument. Toutes ces vis ont un mécanisme particulier et nouveau, qui exclut ce qu'on appelle le *pas mort* ou *pas perdu*, et que l'on peut corriger, si par le laps du tems ou par le grand usage de l'instrument, il venait à s'en former.

La lunette inférieure qui porte le grand niveau, ne se renverse jamais, comme dans les cercles de Le-Noir, lorsque tout le cercle tourne, au contraire cette lunette reste toujours à peu-près dans sa position horizontale, et le niveau ou plutôt la liqueur qu'elle renferme ne subit aucun ballottement ou agitation, et n'est jamais

dans le cas de se séparer, et de former de ces petites bulles d'air, qui souvent se détachent, restent en arrière cachées sous la monture du niveau, et ne sont point aperçues par la personne chargée de le maintenir, ce qui peut produire des erreurs assez graves dans les nivellemens de l' instrument.

Les niveaux sont construits avec un soin tout particulier. Les bouteilles travaillées intérieurement et bien calibrées ne sont point soufflées et fermées à la flamme, parce que l'action du feu trop violente sur des tubes de verres aussi épais en changerait la figure travaillée d'une manière toute particulière. M.r Reichenbach bouche les extrémités de ces tubes hermétiquement avec des tourillons de verre adoucis à l'émeri, et collés avec du parchemin enduit d'une solution de gomme élastique, ce qui exclut absolument toute communication avec l'air extérieur.

Les objectifs de ces lunettes sont non-seulement parfaitement acromatiques, mais travaillés par cet artiste avec du *Flint-glas*, qu'il fabrique lui-même dans une grande verrerie. Il ne travaille pas ses verres dans des bassins, comme à l'ordinaire, mais par des rayons de la longueur du foyer qu'il veut donner à ses verres. Ces rayons sont attachés à des piliers solides de pierre et tournent circulairement sur un pivot d'acier, centre du mouvement, et c'est ainsi qu'il travaille, adoucit et polit ses objectifs sur un coussinet fixe. Les oculaires sont faits autour. Toutes ses lunettes ont une

grande clarté, supportent de grands grossissemens, sans que les objets perdent de leur netteté, les bords du soleil y étant bien tranchés, et les étoiles bien déterminées.

Le cercle de M.r Reichenbach a encore l'avantage d'être muni d'un oculaire prismatique, ce qui ajoute infiniment à la commodité de l'observateur, lequel assis devant l'instrument peut observer avec une égale facilité, et toujours dans la même position, tant au zénith, qu'à l'horizon. Il n'a pas l'embarras de chercher et de pointer sur l'astre qu'il observe, la personne qui tient le niveau étant chargée du soin de placer l'instrument dans l'Azimuth ou dans la verticale de l'astre qu'on observe, ce qu'il fait pour le Soleil au moyen d'un style vertical érigé sur la règle qui couvre le niveau, et sur laquelle sont marqués les points, que l'ombre du style doit couvrir, lorsque le Soleil est dans le plan de l'instrument; l'observateur n'a alors qu'à hausser ou baisser le cercle ou la lunette (c'est selon que l'observation conjugée l'exige) jusqu'à ce qu'il rencontre son objet d'observation. Pour les étoiles on a pratiqué dans le pied de l'instrument une traverse, qui consiste en une pièce de cuivre, qui tourne dans une douille autour de l'axe vertical du cercle, et que l'on peut fixer à volonté au moyen d'une vis de pression. Lorsqu'une fois on a l'astre que l'on veut observer dans le champ de la lunette, l'on fixe cette traverse, en la faisant toucher à un bouton, en tour-

nant le cercle pour l'observation conjugée jusqu'à ce que la traverse touche le bouton une seconde fois, l'on sera sûr d'avoir fait faire un demi tour à l'instrument, et que l'astre sera dans la verticale de la lunette. Comme cette traverse n'est arrêtée que par une vis de pression, et qu'elle peut se mouvoir à frottement dur, on n'a pour suivre l'astre dans l'Azimuth, qu'à pousser le cercle pour le ramener au centre de la lunette ; ce mouvement déplacera en même tems la traverse ; de sorte qu'elle indiquera toujours le vrai vertical dans lequel l'observateur retrouvera son astre. Ce mécanisme très-simple facilite non-seulement la recherche de l'astre, mais ne distrait point l'observateur de l'observation même, et lui permet d'en faire un plus grand nombre dans un tems qu'il perdrait inutilement à chercher l'astre. On peut par ce moyen faire les multiplications de la distance au zénith de la polaire aussi lestement que celles du Soleil, et j'en fais, sans me presser et avec la plus grande facilité, *trente* dans l'espace de 12 à 15 minutes de tems. Je multiplie avec la même facilité les observations des étoiles zénithales, et j'obtiens la même précision, le même accord que par des étoiles prises à hauteur quelconque, vu l'extrême précision avec laquelle on peut s'assurer de la verticalité parfaite de l'instrument pendant le cours de l'observation, par le moyen de deux niveaux, l'un permanent et attaché à l'instrument, l'autre plus grand destiné à se procurer cette verticalité.

P

L'éclairage des fils de toile d'araignée placés dans le foyer de la lunette se fait pendant la nuit par l'axe de la lunette. Des verres verds tempèrent la lumière de la lampe, et modifient cet éclairage à volonté et à mesure que l'on rétrécit le trou par lequel passent les rayons de la lumière. Cette manière d'éclairer les fils a encore l'avantage, que la lumière de la lanterne ne vient jamais frapper l'œil de l'observateur, comme cela arrive aux éclairages par l'objectif; ici la lumière est toujours placée derrière l'observateur et au-dessus de sa tête.

Ce qui rend l'usage de cet instrument plus étendu, et bien plus précieux encore, c'est que l'on peut l'employer de jour comme de nuit à faire les observations des objets célestes. On peut multiplier les observations de l'étoile polaire dans les deux crépuscules, lorsqu'aucune étoile ne paraît à la vue simple, avec la même célérité que pendant la nuit close. A cet effet l'instrument est muni de deux cercles divisés, l'un azimuthal, l'autre vertical et fixé à l'autre bout de l'axe horizontal de l'instrument. On peut par conséquent prendre sur l'un les angles azimuthaux, et sur l'autre les angles de hauteur, comme ils sont à portée de la vue de la personne chargée de maintenir le niveau, elle dirige en même tems l'instrument en azimuth et en hauteur, de sorte que l'observateur sans s'en embarasser trouve toujours son astre dans le champ de sa lunette.

Les cercles répétiteurs de Reichenbach peuvent éga-

lement servir de quart de cercle mural ou de quart de cercle mobile, pour prendre des hauteurs méridiennes, des hauteurs simples, des hauteurs correspondantes soit du Soleil ou des étoiles. Pour cet effet la lunette inférieure porte une espèce d'index en argent, sur lequel il n'y a qu'un seul trait bien fin, qui se replie sur le tranchant du bord du cercle-limbe; sur ce bord du cercle-limbe est enchassée une petite plaque d'argent, qui porte un autre trait très-fin, lorsque ces deux traits extrémement déliés sont amenés par le mouvement doux de la lunette inférieure, qui porte cet index, et le grand niveau à coïncidence parfaite, et que tout le cercle est bien calé et bien nivellé, le point zéro de la division sera alors dirigé vers le vrai zénith, et la lunette supérieure attachée au cercle-vernier donnera par conséquent les distances apparentes au zénith aussi bien que pourrait les donner le meilleur quart de cercle.

Nous sommes entrés à dessein dans des détails un peu longs sur ce nouvel instrument qu'on n'a encore décrit nulle part, pour faire juger du degré de confiance qu'on pourra accorder aux observations; au reste la marche de ces observations mêmes, que nous allons exposer jusque dans leurs premiers élémens, fera mieux apprécier encore leur juste valeur. Nous dirons encore que le cercle dont nous nous sommes servis dans toutes nos observations faites à Turin, est celui dont nous avons parlé plus haut, et dont une partie de l'échelle du

niveau répond à 0″,8. On sait que la bonté des observations faites au cercle-répétiteur repose entièrement sur la sensibilité du niveau, et sur la certitude que la bulle d'air placée une fois à un point de la division y retournera d'elle-même à la fin de ses oscillations.

2.° Pour faire les observations d'Azimuth et autres opérations géodésiques, j'étais muni d'un théodolite-répétiteur de 8 pouces de diamètre du même artiste. Mêmes principes de construction, mêmes moyens d'exécution que dans le cercle-répétiteur. Les quatre verniers de cet instrument donnent immédiatement la lecture de 10 secondes, on peut juger 5″.

Le cercle-vernier porte sur deux montans une lunette plongeante, laquelle à un des bouts de son axe porte un autre cercle vertical qui sert à prendre les angles d'élévation. Cet axe de la lunette se termine en deux tourillons, qui portent sur des coussinets, dans lesquels la lunette tourne sur son axe comme un instrument de passage. On place cet axe de niveau, et on le rend parallèle au plan du cercle-limbe à l'aide d'un niveau à bulle d'air, qu'on y accroche, et qu'on peut retourner, comme le niveau d'une lunette méridienne. On voit par cette forme de construction que le plan du cercle-limbe est toujours placé horizontalement, et qu'on parvient aux objets placés au-dessus ou au dessous du niveau de l'instrument, moyennant la lunette plongeante, et que par conséquent on n'a pas besoin de réduction des angles terrestres à l'horizon, étant

pris dans ce plan même ; de même pour les observations des Azimuths, il n'est pas nécessaire de prendre les élévations ou dépressions des objets terrestres, ni de connaître la hauteur du Soleil, ou d'un autre astre, qui aura servi pour prendre ces Azimuths, puisque en prenant ces angles azimuthaux toujours dans un plan horizontal, on élimine la réfraction soit terrestre, soit céleste, ce qui contribue infiniment à la justesse de l'observation.

La seconde lunette est placée au-dessous du cercle-limbe, et y reste à de petits mouvemens près immobile, elle ne sert que de lunette de sûreté, pour s'assurer de l'immobilité de tout l'instrument dans l'intervalle qu'on aura fait les observations de répétition. Ces répétitions ne peuvent se faire qu'avec la lunette supérieure et plongeante, et alors elles ne se font pas dans la progression arithmétique double comme dans les cercles répétiteurs, mais dans une progression arithmétique simple de 1, 2, 3, 4, 5 etc. fois le premier angle observé.

3.° Deux sextans à réflexion de *Troughton* à Londres de 9 pouces de rayon avec leurs horizons artificiels. Ces instrumens sont divisés sur limbe d'argent de 10″ en 10″, garnis de lunettes acromatiques qui amplifient beaucoup, ils sont sur tout d'une grande commodité et d'une grande précision pour prendre les hauteurs correspondantes du Soleil.

4.° Un instrument de passage de deux pieds et demi,

contrebalancé et éclairé par l'axe. Mais le local de l'Observatoire de Turin ne me permit pas de le placer; c'était assez inutile, puisque j'avais dans mes sextans, et dans mon cercle-répétiteur des moyens suffisans (à la vérité un peu plus longs) pour m'assurer du tems vrai à un quart de seconde près. Je n'avais pas même besoin de cette précision pour la réduction des hauteurs circomméridiennes, mais il la fallait pour l'observation des azimuths, puisque, comme on sait, une seconde de tems peut souvent produire une erreur de 10 à 12 secondes sur l'azimuth.

5.° Quatre chronomètres, ou montres-marines, trois de *Josiach-Emery* de Londres, et un de *Ferdinand Bertoud* de Paris. Ces montres dont j'ai éprouvé et suivi la marche depuis vingt ans, et dont deux marchent sur le tems du premier mobile ou le tems sidéral, les deux autres sur le tems moyen solaire, m'ont non-seulement servi dans tout le cours de mes observations astronomiques, mais aussi à déterminer la longitude de l'Observatoire impérial de Turin.

Mon premier soin fut d'observer la latitude moyennant l'étoile polaire; on sait que la meilleure méthode c'est d'observer la distance au zénith de cette étoile à son passage supérieur et inférieur au méridien, puisqu'elle élimine du calcul la déclinaison de cette étoile. Mais la saison dans laquelle nous étions, ne me permit que de la prendre à son passage supérieur, lequel arrivait vers minuit, le passage inférieur tombait donc

vers midi, et était par conséquent invisible ; mais la déclinaison moyenne de la polaire est si bien connue à présent, qu'on peut avec la plus grande sécurité se reposer sur des observations prises à un seul passage, en y employant cette déclinaison.

Nous présenterons d'abord toutes nos observations brutes, pour donner à ceux qui voudront, la faculté de refaire nos calculs et de juger de nos résultats. Nous donnerons les tems observés à nos montres, et à côté les arcs parcourus par le cercle-vernier. Il serait assez superflu et inutile de rapporter les hauteurs correspondantes du Soleil, qui ont servi à régler nos montres, il suffira de dire qu'on en a pris tous les jours deux douzaines le matin et autant le soir à deux de nos montres, à l'une réglée sur le tems sidéral, et à l'autre réglée sur le tems solaire moyen ; les autres montres ont été comparées à midi. Ces hauteurs s'accordaient toutes à donner le tems à une petite fraction de seconde près. Nous nous sommes par conséquent contentés de marquer chaque fois les corrections de nos montres, pour pouvoir les ramener aux tems vrais. Nous indiquons au reste tous les élémens de calcul que nous avons employés, et les sources où nous les avons puisés.

I.re PARTIE

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

---

1. *Latitude de l'Observatoire Impérial de Turin, par l'observation de l'étoile polaire à son passage supérieur.*

Les observations de latitude ont été faites dans la grande salle de l'Observatoire au-devant de la porte vitrée du Nord. Pour réduire au Méridien les distances au zénith observées et multipliées près du Méridien, nous nous sommes servi de préférence de la méthode de M.r Bohnenberger (1) Professeur d'astronomie à Tubingue, et que M.r Carlini a reproduite dans les ephémérides de Milan pour l'an 1809, page 50.

Soit L la latitude du lieu de l'observation, D la déclinaison de l'astre observé, Z la distance au zénith, *a* l'angle horaire en minutes de tems, *r* la réduction au Méridien de la distance au zénith observée. Soit encore $\frac{\cos L \cos D}{\sin Z} = B$, on aura la correction de ces distances

$$r = -1{,}963495 B a^2 + 0{,}0000093456\left(\tfrac{1}{3}B + B^2 \text{cotang.} Z\right) a^4$$
$$-0{,}00000000089\left(\tfrac{1}{43}B + \tfrac{1}{3}B^2 \text{cotang.} Z + B^3 \text{cotang} Z\right) a^6$$

---

(1) Anleitung. zur geographisten Ortsbestimmung vorzüglith vermittelst des Spiegel-Sextanten von M. J. G. F. Bohnenberger. Göttingen 1795, pag. 224, 265 et 501.

Dans une longue série d'observations mulipliées, il n'est nullement nécessaire de calculer la réduction pour chaque observation séparément ce qui serait très-long; il est plus court et tout aussi exact de calculer la somme de ces corrections, qui répondent aux différens instans des observations. Soit Σa^2 la somme des carrés des angles horaires, Σa^4 la somme des quatrièmes puissances etc. . . . . on aura alors la somme de ces corrections.

$$\Sigma r = -1{,}963495 B \Sigma a^2 + 0{,}0000093456 \left(\frac{1}{3}B + B^2 \text{cotang.} Z\right) \Sigma a^4$$

$$-0{,}00000000089 \left(\frac{1}{43}B + \frac{1}{3}B^2 \text{cotang.} Z + B^3 \text{cotang.}^2 Z\right) \Sigma a^6$$

pour éviter dans ces termes des fractions trop petites, on peut les mettre sous cette forme plus commode :

$\Sigma r = M \Sigma a^2 + N \Sigma \left(\frac{aa}{100}\right)^2 + P \Sigma \left(\frac{aa}{100}\right)^3$ dans laquelle on a :

$$M = -1{,}963495 B$$

$$N = +0{,}093456 \left(\frac{1}{3}B + B^2 \text{cotang.} Z\right)$$

$$P = -0{,}000089 \left(\frac{1}{43}B + \frac{1}{3}B^2 \text{cotang.} Z + B^3 \text{cotang.}^2 Z\right)$$

On pourra presque toujours négliger le troisième terme. C'est d'après cette formule que nous avons réduit toutes nos distances au zénith observées.

On doit aussi tenir compte de la variation de la réfraction pendant l'intervalle des observations, et si

l'on observe un astre, dont la déclinaison change, il faut également en tenir compte pendant cet intervalle et l'appliquer à la somme des distances au zénith observées.

Quant à la position moyenne de l'étoile polaire, nous nous sommes servi de celle que nous avons déterminée nous-mêmes. L'ascension droite moyenne, comme nous l'avions fixée en 1790 par un grand nombre d'observations faites à Gotha à une excellente lunette méridienne de six pieds de RAMSDEN = 12.° 33′ 56″, 943. (1)

La déclinaison moyenne comme nous l'avons trouvée tout récemment par 580 observations faites au même cercle-répétiteur de REICHENBACH pour l'an 1808=88.° 17′ 0″,840. Nous avons supposé la précession ou la variation annuelle de l'étoile en ascension droite, en 1809 = + 3′ 23″,224 et la variation en déclinaison pour cette même année = + 19″,450, le mouvement propre en déclinaison = — 0″,19, par conséquent la vraie variation en déclinaison = + 19″, 26.

Les aberrations et nutations ont été calculées d'après nos nouvelles tables (2), qui supposent l'aberration absolue 20″,255 et la nutation dans le rapport des axes de son ellipse 9″,6480 : 7″,1822 comme nous l'avons déterminée dernièrement. (3)

---

(1) Voyez mes tables spec. aberr. et nutat. Gothae 1806, vol. I, pag. 74.

(2) Ibidem vol. I, pag. XXIII.

(3) Ibidem vol I, pag. 81 et 116.

Pour la réfraction nous avons employé les tables de M.r Carlini construites (1) sur la théorie du comte La-Place. (2)

Les instans des observations ont été marqués à un des Chronomètres d'Emery réglé sur le tems sidéral. Les hauteurs du baromètre sont en pouces, lignes et dixièmes de ligne du pied de Paris, les thermomètres d'après la division de Réaumur; nous avons toujours pris un milieu entre un thermomètre suspendu près de l'instrument, et un autre placé hors de l'observatoire au grand air.

---

(1) Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1808, pag. 57.

(2) Mécan. célest. vol. IV, pag. 231.

PASSAGE SUPÉRIEUR DE L'ÉTOILE POLAIRE.

1809 *le* 30 *septembre.*

Ascension droite apparente de l'Etoile, calculée	0^h	55′	32″,	10
Correction du Chronomètre	+ 8		17,	00
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	1	3	49,	10

Barom. 27 pouces 3,0 lignes.
Therm. + 10°,5

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
0^h 50′ 46″	— 13′ 3″, 1	170, 347	2, 91
51 30, 5	12 18, 6	151, 536	2, 29
52 10, 5	11 38, 6	135, 568	1, 84
52 55	10 54, 1	118, 846	1, 41
53 49	10 0, 1	100, 033	1, 00
54 30, 5	9 18, 6	86, 676	0, 75
55 14	8 35, 1	73, 703	0, 55
56 7	7 42, 1	59, 316	0, 35
56 45	7 4, 1	49, 962	0, 25
57 26	6 23, 1	40, 768	0, 17
58 2, 5	5 46, 6	33, 370	0, 11
58 50	4 59, 1	24, 851	0, 06
59 40	4 9, 1	17, 237	0, 03
1 0 38	3 11, 1	10, 144	0, 01
1 25	2 24, 1	5, 768	
2 1, 5	1 47, 6	3, 216	
2 53	56, 1	0, 874	
3 51	+ 1, 9	0, 002	
4 45	55, 9	0, 868	
5 19, 5	1 30, 4	2, 270	
6 3	2 13, 9	4, 981	
6 54, 5	3 5, 4	9, 549	0, 01
7 44	3 54, 9	15, 328	0, 02
8 40	4 50, 9	23, 506	0, 05
9 22, 5	5 33, 4	30, 877	0, 09
10 9	6 19, 9	40, 090	0, 15
10 54	7 4, 9	50, 150	0, 24
11 35	7 45, 9	60, 296	0, 36
12 25	8 35, 9	73, 931	0, 54
13 5, 5	9 16, 4	85, 995	0, 73
	Somme . . .	1480, 058	13, 92

Arc parcouru après 30 répétitions	1296°	22′	2″,	00
Réductions au Méridien	—	1	29,	27
Variation de la Réfraction	+		0,	04
Arc réduit	1296	20	32,	77
Arc simple, ou dist. appar. au Zénith	43	12	41,	09
Réfraction vraie	+		52,	82
Vraie distance au Zénith	43	13	33,	91
Vraie déclinaison de la Polaire.	88	17	33,	64
Latitude observée	45	3	59,	73

1809 *le* 1.er *octobre.*

Ascension droite app. de Etoile polaire calculée .	0h	55′	32″,	30
Correction du Chronomètre	+	8	27,	85
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	1	4	0,	15

Barom. 27 pouces 2, 5 lignes.
Therm. + 10°. 5.

TEMS DU CHRONOMETRE	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
0h 52′ 25″	— 11′ 35″, 2	134, 251	1, 80
53 10, 5	10 49, 7	117, 243	1, 37
54 6	9 54, 2	98, 076	0, 96
54 48	9 12, 2	84, 701	0, 71
55 41	8 19, 2	69, 223	0, 48
56 20	7 40, 2	58, 829	0, 34
56 59	7 1, 2	49, 281	0, 24
57 48, 5	6 11, 7	38, 378	0, 14
58 36, 5	5 23, 7	29, 106	0, 08
59 14	4 46, 2	22, 754	0, 05
1 0 2	3 58, 2	15, 761	0, 02
0 45	3 15, 2	10, 585	0, 01
1 28	2 32, 2	6, 435	
2 4	1 56, 2	3, 751	
2 42	1 18, 2	1, 699	
3 19, 5	40, 7	0, 460	
3 58	2, 2	0, 002	
4 28, 5	+ 28, 3	0, 222	
5 11	1 10, 8	1, 393	
6 2	2 1, 8	4, 121	
6 47	2 46, 8	7, 728	
7 26	3 25, 8	11, 965	0, 01
8 1	3 50, 8	14, 796	0, 02
8 43, 5	4 43, 3	22, 294	0, 05
9 30	5 29, 8	30, 213	0, 09
10 33, 5	6 33, 3	42, 969	0, 18
11 9	7 8, 8	51, 074	0, 26
11 45	7 44, 8	60, 011	0, 36
12 28	8 27, 8	71, 629	0, 51
13 8	9 7, 8	83, 357	0, 69
	Somme . . .	1142, 307	8, 35

Arc parcouru après 30 répétitions	1296°	22′	7″,	50
Réductions au Méridien	—	1	8,	90
Variation de la Réfraction	+		0,	03
Arc réduit	1296	20	58,	63
Arc simple ou dist. app. au Zénith	43	12	41,	95
Réfraction vraie	+		52,	68
Vraie distance au Zénith	43	13	34,	63
Vraie déclinaison de la Polaire	88	17	34,	03
Latitude observée	45	3	59,	40

1809 *le* 2 *octobre.*

Ascension droite app. de l'Etoile, calculée . .	0^h 55′ 32″, 40
Correction du Chronomètre	+ 8 36, 95
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	1 4 9, 35

Barom. 27 pouces 5, 0 lignes.
Therm. + 10°, 0.

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{a\,a}{100}\right)^2$
0^h 53′ 35″	− 10′ 34″, 4	111, 796	1, 24
54 18	9 51, 4	97, 154	0, 94
54 54	9 15, 4	85, 686	0, 73
55 34	8 35, 4	73, 788	0, 54
56 4	8 5, 4	65, 449	0, 43
56 49, 5	7 19, 9	53, 753	0, 28
57 32	6 37, 4	43, 868	0, 18
58 12	5 57, 4	35, 482	0, 12
58 48	5 21, 4	28, 695	0, 08
59 21	4 48, 4	23, 104	0, 05
1 0 0	4 9, 4	17, 279	0, 03
0 31	3 38, 4	13, 250	0, 01
1 14, 5	2 54, 9	8, 497	
2 1	2 8, 4	4, 580	
2 38	1 31, 4	2, 320	
3 15	54, 4	0, 822	
3 59, 5	9, 9	0, 026	
4 36	+ 26, 6	0, 196	
5 16	1 6, 6	1, 232	
6 8	1 58, 6	3, 908	
6 44	2 34, 6	6, 640	
7 22	3 12, 6	10, 304	0, 01
8 0, 5	3 51, 1	14, 835	0, 02
8 50	4 40, 6	21, 872	0, 04
9 36	5 26, 6	29, 630	0, 08
10 6	5 56, 6	35, 324	0, 12
10 48	6 38, 6	44, 134	0, 19
11 21, 5	7 12, 1	51, 864	0, 26
12 10	8 0, 6	64, 160	0, 41
12 48	8 38, 6	74, 708	0, 55
	Somme . . .	1024, 356	6, 31

Arc parcouru après 30 répétitions	1296° 22′ 3″, 25
Réductions au Méridien	− 1 1, 78
Variation de la Réfraction	+ 0, 03
Arc réduit	1296 21 1, 50
Arc simple ou dist. app. au Zénith	43 12 42, 05
Réfraction vraie	+ 53, 27
Vraie distance au Zénith	43 13 35, 32
Vraie déclinaison de la Polaire	88 17 34, 40
Latitude observée	45° 3′ 59″, 08

1809, *le* 5 *octobre*.

Ascen. droite app. de l'Etoile calculée	0^h	55′ 32″,	74
Correction du Chronomètre	+	9 3,	00
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	1	4 35,	74

Barom. 27 pouces 3, o lignes.
Therm. + 11°, o.

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
0^h 52′ 34″	− 12′ 1″, 7	144, 681	2, 09
53 34	11 1, 7	121, 625	1, 48
54 13	10 22, 7	107, 710	1, 16
55 11	9 24, 7	88, 580	0, 79
56 5	8 30, 7	72, 449	0, 52
57 0	7 35, 7	57, 664	0, 33
58 49	5 46, 7	33, 389	0, 11
59 51	4 44, 7	22, 516	0, 05
1 0 52	3 43, 7	13, 901	0, 02
5 58	+ 1 22, 3	1, 882	0, 00
	Somme	664, 417	6, 55

Un brouillard fort épais n'a pas permis de faire un plus grand nombre d'observations.

Arc parcouru par 10 répétitions		432° 7′ 44″ 25
Reductions au Méridien	−	40, 07
Variation de la Réfraction	+	0, 02
Arc réduit		432 7 4, 20
Arc simple ou dist. app, au Zénith		43 12 42, 42
Réfraction vraie	+	52, 70
Vraie distance au Zénith		43 13 35, 12
Vraie déclinaison de la Polaire		88 17 35, 79
Latitude observée		45 4 0, 67

1809, *le* 6 *octobre.*

Ascension droite apparente de l'Etoile, calculée 0h 55′ 32″, 80
Correction du Chronometre . . . . + 9 11, 92

Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron. 1 4 44, 72
Barom. 27 pouces 3,5 lignes.
Therm. + 11°, 0

TEMS DU CHRONOMETRE.	ANGLE HORAIRE a	aa	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
0h 52′ 36″, 5	— 12′ 8″, 2	147, 399	2, 17
53 13	11 31, 7	132, 903	1, 77
53 53	10 51, 7	117 976	1, 39
54 37	10 7, 7	102, 585	1, 05
55 18	9 26, 7	89, 209	0, 80
55 52	8 52, 7	78, 825	0, 62
56 33	8 11, 7	67, 158	0, 45
57 16	7 28, 7	55, 926	0, 31
57 54	6 50, 7	46, 855	0, 21
58 35	6 9, 7	37, 966	0, 14
59 8	5 36, 7	31, 491	0, 10
59 55	4 49, 7	23, 313	0, 05
1 0 30	4 14, 7	18, 020	0, 03
1 5	3 39, 7	13, 438	0, 01
1 44	3 0, 7	9, 070	0, 01
2 19	2 25, 7	5, 897	
2 57	1 47, 7	3, 222	
3 42	1 2, 7	1, 092	
4 18	26, 7	0, 197	
4 54	+ 9, 3	0, 023	
5 35	50, 3	0, 703	
6 17	1 32, 3	2, 366	
6 54	2 9, 3	4, 645	
7 29	2 44, 3	7, 498	
8 1	3 16, 3	10, 705	0, 01
8 32	3 47, 3	14, 352	0, 02
9 14	4 29, 3	20, 146	0, 04
9 45	5 0, 3	25, 050	0, 06
10 20	5 35, 3	31, 230	0, 10
11 8	6 23, 3	40, 811	0, 17
	Somme . . .	1140, 071	9, 51

Arc parcouru après 30 répétitions . . . . 1296° 22′ 27″, 25
Reductions au Méridien . . . . — 1 8, 76
Variation de la Réfraction . . . . + 0, 03

Arc réduit 1296 21 18, 53
Arc simple ou dist. app. au Zénith 43 12 42, 61
Réfraction vraie . . . . + 52, 66

Vraie distance au Zénith 43 13 35, 27
Vraie declinaison de la Polaire 88 17 36, 17

Latitude observée 45 4 0, 90

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS DE L'ÉTOILE POLAIRE.				
1809.	NOMBRE d'observations du jour.	LATITUDE. RÉSULTAT SIMPLE.	NOMBRE d'observations réunies.	LATITUDE Résultats combinés.
Sept. 30	30	45° 3′ 59″, 73	30	45° 3′ 59″, 73
Oct. 1	30	59 , 40	60	59 , 57
2	30	59 , 08	90	59 , 40
5	10	60 , 67	100	59 , 53
6	30	60 , 90	130	59 , 85

Ce que nous appelons ici *résultat simple*, est celui que donne le nombre des répétitions de chaque jour, par exemple, 30 par jour. Les *résultats combinés* sont ce que donne la *continuation* des répétitions du premier jour, ajoutée à celles du second jour etc. . . . c'est-à-dire, au bout du second jour on prend l'observation de 60 répétitions, le troisième jour celle de 90 répétitions et ainsi de suite. C'est de la même manière, que MM. DELAMBRE et MECHAIN ont présenté leur résultat dans la mesure de la méridienne. (1)

Soit le résultat simple de la latitude du premier jour $=x$, du second $=y$, du troisième $=z$ etc. . . . Le nombre des répétitions de chaque jour m, n, p etc. . . . on aura les résultats combinés.

$$\text{du 1.}^{\text{er}} \text{ jour} = \frac{mx}{m}$$

(1) Corresp. astr. et géogr. vol. XIII, page 353.

$$2^{d} \text{ jour} = \frac{mx+ny}{m+n}$$

$$3^{me} \text{ jour} = \frac{mx+ny+pz}{m+n+p}$$

etc. . . . etc. . . .

Le tableau suivant en expose l'application à notre exemple.

NOMBRE d'observations de chaque jour.	LATITUDE par les résultats simp. 45° 3'	OBSERVATIONS RÉUNIES.	LATITUDE par les résult. comb 45.° 3'
$30 = m$	$59'',73 = x$	$\frac{mx}{m} = \frac{1791'',90}{30}$	59″,73
$30 = n$	$59,40 = y$	$\frac{mx+ny}{m+n} = \frac{3573'',90}{60}$	59,57
$30 = p$	$59,08 = z$	$\frac{mx+ny+pz}{m+n+p} = \frac{5346'',30}{90}$	59.40
$10 = q$	$60,67 = u$	$\frac{mx+ny+pz+qu}{m+n+p+q} = \frac{5953'',00}{100}$	59,53
$30 = r$	$60,90 = v$	$\frac{mx+ny+pz+qu+rv}{m+n+p+q+r} = \frac{7780'',00}{130}$	59,85.

Donc la latitude de l'Observatoire impérial de Turin par 130 observations réunies de l'étoile polaire à son passage supérieur sera

45° 3′ 59″, 85

2. *Latitude, par l'observation de l'étoile α de l'aigle* (ATAIR.)

Nous avons choisi cette étoile de préférence, d'abord parce que M.r PIAZZI en a déterminé la déclinaison récemment avec un soin tout particulier, et que le mouvement propre de cette étoile en déclinaison paraît très-bien déterminé. Dans le *libro sesto del Reale Osservatorio di Palermo*, ce célèbre Astronome fixe page 18 la déclinaison de cette étoile par 70 observations faites à son grand cercle pour 1805=8° 21′ 50″, 3 le mouvement propre en déclinaison +0″, 38, exactement comme je l'avais trouvé en 1804 (1). Donc la vraie variation annuelle en déclinaison sera =+8″, 91.

Voici maintenant les observations:

(1) Corresp. astr. et géogr. vol. X, p. 26 et tab. spec. aberr. et nutat. vol. 1 pag. 67.

ATAIR.

1809 *le* 28 *septembre.*

Ascension droite app. de l'Etoile, calculée . . .	19^h	41'	30",	66
Correction du Chronomètre	+	7	54,	74
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	19	49	25,	40

Barom. 26 pouces 10, 25 lignes.
Therm. + 13°, 5.

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	aa	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
19^h 35' 56",	— 13' 29", 4	181, 981	3, 30
36 39	12 46, 4	163, 158	2, 66
37 19	12 6, 4	146, 572	2, 14
38 20, 5	11 4, 9	122, 8[illegible]4	1, 51
39 27	9 58, 4	99, 467	0, 99
40 14, 5	9 10, 9	84, 303	0, 71
40 57	8 28, 4	71, 798	0, 51
41 35, 5	7 49, 9	61, 335	0, 37
42 34, 5	6 50, 9	46, 900	0, 21
43 16	6 9, 4	37, 905	0, 14
44 13	5 12, 4	27, 110	0, 07
45 1	4 24, 4	19, 419	0, 04
45 37	3 48, 4	14, 491	0, 02
46 19	3 6, 4	9, 651	0, 01
47 19	2 6, 4	4, 438	
48 16, 5	1 8, 9	1, 319	
48 55	30, 4	0, 257	
49 35	+ 9, 6	0, 025	
50 20, 5	55, 1	0, 843	
51 7	1 41, 6	2, 866	
51 59	2 33, 6	6, 554	
52 39	3 13, 6	10, 412	0, 01
53 37	4 11, 6	17, 584	0, 03
54 21	4 55, 6	24, 272	0, 06
55 9	5 43, 6	32, 795	0, 10
56 6	6 40, 6	44, 578	0, 19
56 48	7 22, 6	54, 415	0, 29
57 36	8 10, 6	66, 858	0, 44
58 14	8 48, 6	77, 617	0, 60
58 56	9 30, 6	90, 440	0, 82
	Somme . . .	1522, 167	15, 22

Arc parcouru après 30 répétitions	1101°	12',	31",00	
Réductions au Méridien	—	58	52 ,49	
Variation de la Réfraction	+		1 ,45	
Arc réduit	1100	13	39 ,96	
Arc simple ou dist. app. au Zénith	36	40	27 ,33	
Réfraction vraie	+		40 ,68	
Vraie distance au Zénith	36	41	8 ,01	
Vraie déclinaison d'Atair	8	22	52 ,19	
Latitude observée	45°	4'	0",20	

1809, *le* 30 *septembre.*

Ascension droite apparente de l'Etoile, calculée	19^h	41′	30″,65
Correction du Chronomètre . . . . +		8	14,23
Passage de l'Etoile au Méridien en tems du Chron.	19	49	44,88

Barom. 27 pouces 3, 0 lignes.
Therm. + 11°, 5

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
19^h 37′ 23″,	— 12′ 21″, 9	152, 894	2, 34
38 20	11 24, 9	130, 302	1, 70
39 19	10 25, 9	108, 820	1, 18
40 1, 5	9 43, 4	94, 544	0, 89
40 38	9 6, 9	83, 084	0, 69
41 36	8 8, 9	66, 396	0, 44
42 18	7 26, 9	55, 478	0, 30
43 3	6 41, 9	44, 868	0, 19
43 35	6 9, 9	38, 007	0, 14
44 10, 5	5 34, 4	31, 062	0, 09
46 17	3 27, 9	12, 206	0, 01
47 9	2 35, 9	6, 751	
47 53	1 51, 9	3, 479	
48 37	1 7, 9	1, 281	
49 17	27, 9	0, 215	
50 5, 5	+ 20, 6	0, 118	
50 44	59, 1	0, 970	
51 20	1 35, 1	2, 512	
52 0	2 15, 1	5, 071	
52 54	3 9, 1	9, 933	
53 34	3 49, 1	14, 580	0, 02
54 29	4 44, 1	22, 421	0, 05
55 9	5 24, 1	29, 178	0, 08
55 53	6 8, 1	37, 639	0, 13
56 34	6 49, 1	46, 490	0, 21
57 12, 5	7 27, 6	55, 604	0, 30
57 50	8 5, 1	65, 368	0, 43
58 31	8 46, 1	76, 884	0, 59
59 13, 5	9 28, 6	89, 808	0, 81
59 47	10 2, 1	100, 702	0, 01
	Somme . . .	1386, 665	11, 60

Arc parcouru après 30 répétitions	1101°	6′	23″,75
Réductions au Méridien	—	53	2,07
Variation de la Réfraction	+		1,32
Arc réduit	1100	13	23,00
Arc simple ou dist. app. au Zénith	36	40	26,77
Réfraction vraie	+		41,66
Vraie distance au Zénith	36	41	8,43
Vraie declinaison d'Ataïr	8	22	52,23
Latitude observée	45°	4′	0″, 66

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS D'ATAIR.				
1809.	NOMBRE d'observations du jour.	LATITUDE. RÉSULTAT SIMPLE.	NOMBRE d'observations réunies.	LATITUDE Résultats combinés
Sept. 28	30	45° 4′ 0″,20	30	45° 4′ 0″,20
30	30	0 ,66	60	0 ,43

Donc le milieu de ces deux jours d'observations donne la latitude 45° 4′ 0″, 43.

3. *Latitude par l'observation du Soleil.*

Quoique MM. Délambre et Méchain dans le travail de la méridienne, ayent exclus pour les latitudes les observations du soleil, à cause de l'incertitude qui règne encore sur l'obliquité de l'écliptique, cependant nous n'avons pas cru devoir négliger l'observation de cet astre, et nous avons mis le peu de tems que nous pouvions consacrer à ce travail à profit, pour en observer les distances méridiennes toutes les fois que le ciel le permettait. Si l'élément douteux dont il est question, n'est pas fixé encore en ce moment avec la dernière précision, il faut bien espérer qu'il le sera un jour, et au moins nos observations pourront servir alors. Nous sommes engagés nous-mêmes à cet effet dans une suite d'observations des solstices dont nous rendrons compte dans un autre tems, car cela nous éloignerait trop ici de notre objet principal, il suffira

d'avertir que l'obliquité de l'écliptique dont nous nous sommes servi pour nos calculs, résulte des dernières Recherches que nous avons faites pendant deux solstices d'eté observés en 1808 et 1809 à Gênes et à Milan, et pendant trois solstices d'hiver observés en 1807, 1808 et 1809 à Marseille et à Pise. Quant aux autres élémens de l'orbite terrestre, dont nous avions besoin dans nos calculs, nous les avons pris de la seconde édition de nos tables solaires (1). Nous avons évité d'employer l'élément douteux du diamètre du soleil, lequel, comme on sait, varie selon la bonté et l'amplification des lunettes, nous l'avons éludé en observant au cercle-répétiteur alternativement le bord supérieur du soleil dans les observations impaires, et le bord inférieur dans les observations conjuguées et paires, ce qui nous donne immédiatement l'observation du centre du soleil.

Le tableau suivant renferme tous les élémens, qu'il nous a fallu emprunter de la théorie du soleil :

1809.		LONGITUDE vraie du Soleil pour midi à Turin.				DÉCLINAISON vraie australe du Soleil y compris sa latitude.			
Sept.	29	6^s	5°	52′	31″,88	—	2°	20′	8″,54
	30	6	6	51	33,65	—	2	43	31,26
Oct.	2	6	8	49	43,27	—	3	30	11,35
	3	6	9	48	52,65	—	3	53	28,77
	5	6	11	47	18,47	—	4	39	55,51

(1) Tab. motuum solis novae et iterum correctae, ex theoria gravitatis etc. La-Place. Gothae 1804.

Les observations du soleil ont été les suivantes, faites à l'un des chronomètres, réglé sur le tems moyen solaire.

SOLEIL.

1809 *le* 29 *septembre.*

Midi au Chronomètre . . . . 23h 49' 31'', 17
Marche horaire du Chronomètre, y compris la variation de l'équat. du tems . . . . — 1, 47
Variation horaire du Soleil en déclinaison . . + 58, 480

Barom. 26 pouces 11, 75 lignes.
Therm. + 14°, 5.

TEMS DU CHRONOMETRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
23h 46' 33''	— 2' 58'', 3	8, 832	0, 01
47 4	2 27, 3	6, 027	
47 29	2 2, 3	4, 155	
47 57, 8	1 33, 4	2, 423	
48 34	57, 2	0, 908	
49 10	21, 2	0, 124	
49 37	+ 5, 8	0, 010	
50 29	57, 8	0, 928	
51 1	1 29, 8	2, 240	
51 26	1 54, 9	3, 668	
52 35	3 3, 9	9, 396	0, 01
53 3	3 31, 9	12, 472	0, 02
53 40, 5	4 9, 5	17, 296	0, 03
54 13, 5	4 42, 5	22, 169	0, 05
54 44, 8	5 13, 8	27, 353	0, 07
55 29	5 58, 0	35, 601	0, 12
56 28, 5	6 57, 5	48, 419	0, 23
56 59, 5	7 28, 6	55, 901	0, 30
57 37	8 6, 1	65, 637	0, 43
58 5	8 34, 1	73, 417	0, 54
Somme . . .	+ 51' 54'', 5	396, 976	1, 81

Arc parcouru après 20 répétitions . . . . :	947°	57'	57'', 25
Réductions au Méridien	—	12	27, 04
Variation de la déclinaison du Soleil	—		50, 88
Variation de la Réfraction	+		0, 46
Arc réduit	947	44	39, 79
Arc simple ou dist. app. au Zénith	47	23	13, 99
Réfraction vraie	+		59, 41
Parallaxe	—		6, 40
Vraie distance au Zénith	47	24	7, 00
Déclinaison vraie du Soleil australe.	- 2	20	8, 54
Latitude observée	45°	3'	58'', 46

1809 *le* 30 *septembre.*

Midi au Chronomètre	23h	48'	35",47
Marche horaire du Chronomètre, y compris la variation de l'équat. du tems	—		1,60
Variation horaire du Soleil en déclinaison	+		58,417

Barom. 27 pouces 3 lignes.
Therm. + 12°,5

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	aa	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
23h 42' 28"	— 6' 7",7	37,557	0,13
42 51,	5 44,7	33,005	0,11
43 25,5	5 10,2	26,729	0,06
43 57	4 38,7	21,576	0,04
44 34,5	4 1,2	16,161	0,03
45 9	3 26,6	12,057	0,01
45 36	2 59,6	8,960	0,01
45 58,5	2 37,1	6,856	
46 27	2 8,6	4,594	
46 51	1 44,5	3,033	
48 0,5	35,0	0,340	
48 27	8,5	0,020	
48 48	+ 12,5	0,043	
49 15,5	40,0	0,444	
49 40	1 4,5	1,156	
50 4	1 28,5	2,177	
50 31,8	1 56,3	3,758	
51 11	2 35,6	6,726	
51 39,5	3 4,1	9,416	0,01
52 9	3 33,6	12,673	0,01
53 28	4 52,7	23,798	0,06
54 2,5	5 27,2	29,738	0,08
54 40	6 4,7	36,947	0,13
55 7	6 31,7	42,620	0,18
55 40,5	7 5,3	50,245	0,25
56 11	7 35,8	57,709	0,33
56 38	8 2,8	64,750	0,42
57 7,5	8 32,3	72,904	0,53
57 45	9 9,9	83,997	0,71
58 10	9 34,9	91,809	0,84
Somme . . .	+ 48' 10",0	761,798	3,94

Arc parcouru après 30 répétitions	1433°	42'	9",75
Réductions au Méridien	—	23	44,23
Variation de la déclinaison du Soleil	—		46,91
Variation de la Réfraction	+		0,90
Arc réduit	1433	17	39,51
Arc simple, ou dist appar. au Zénith	47	46	35,32
Réfraction vraie	+	1	1,38
Parallaxe	—		6,44
Vraie distance au Zénith	47	47	30,26
Vraie déclinaison du Soleil australe	— 2	43	31,26
Latitude observée	45	3	59,00

1809, *le* 2 *octobre.*

Midi au Chronomètre	23h 46′ 35″, 81
Marche horaire du Chronomètre, y compris la variation de l'équat. du tems	— 1, 65
Variation horaire du Soleil en déclinaison . . .	+ 58, 271

Barom. 27 pouces 4,5 lignes.
Therm. + 14°,0.

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	aa	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
23h 41′ 38″, 5	— 4′ 57″, 5	24, 586	0, 06
42 7, 5	4 28, 5	19, 027	0, 04
42 46	3 49, 9	14, 681	0, 02
43 16, 5	3 19, 4	11, 044	0, 01
43 49, 5	2 46, 4	7, 691	
44 10	2 25, 9	5, 913	
44 42	1 53, 8	3, 597	
45 4	1 31, 8	2, 341	
45 35	1 0, 8	1, 027	
45 58	37, 8	0, 397	
47 10, 5	+ 34, 7	0, 334	
47 37	1 1, 2	1, 041	
48 6, 5	1 30, 7	2, 285	
48 41	2 5, 3	4, 362	
49 8	2 32, 3	6, 444	
49 30	2 54, 3	8, 439	0, 01
49 58, 5	3 22, 8	11, 425	0, 01
50 27	3 51, 3	14, 861	0, 02
50 51, 5	4 15, 9	18, 191	0, 03
51 17, 5	4 41, 9	22, 074	0, 05
52 29	5 53, 4	34, 692	0, 12
52 54	6 18, 4	39, 874	0, 15
53 30	6 54, 4	47, 702	0, 22
54 1	7 25, 5	55, 131	0, 30
54 22, 5	7 47, 0	60, 581	0, 36
54 43	8 7, 5	66, 016	0, 44
55 4	8 28, 5	71, 826	0, 52
55 27	8 51, 5	78, 471	0, 61
56 6, 5	9 31, 1	90, 599	0, 82
56 39	10 3, 6	101, 204	1, 01
Somme . .	+ 1h 19′ 19″, 5	815, 856 .	4, 80

Arc parcouru après 30 répétitions	1457° 4′ 42″, 25
Réductions au Méridien	— 25 5, 72
Variation de la Déclinaison du Soleil	— 1 16, 92
Variation de la Réfraction	+ 0, 97
Arc réduit	1456 38 20, 58
Arc simple ou dist. app. au Zénith	48 33 16, 68
Réfraction vraie	+ 1 2, 83
Parallaxe	— 6, 51
Vraie distance au Zénith	48 34 13, 00
Déclinaison vraie du Soleil australe	3 30 11, 35
Latitude observée	45 4 1, 65

1809, *le 3 octobre.*

Midi au Chronomètre	23h 45′ 39″, 28
Marche horaire du Chronomètre, y compris la variation de l'équat. du tems	− 1, 58
Variation horaire du Soleil en déclinaison . . .	+ 58, 146
Barom. 27 pouces 6,75 lignes.	
Therm. + 13°, 0	

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	$a\,a$	$\left(\frac{a\,a}{100}\right)^2$
23h 40′ 24″, 5	− 5′ 15″, 0	27, 563	0, 07
41 1	4 38, 5	21, 546	0, 04
41 44	3 55, 5	15, 407	0, 02
42 10	3 29, 4	12, 380	0, 01
42 52	2 47, 4	7, 784	
43 26	2 13, 4	4, 944	
44 8	1 31, 3	2, 315	
44 44	55, 3	0, 849	
45 21, 5	17, 8	0, 088	
45 46	+ 6, 7	0, 012	
47 35	1 55, 8	3, 725	
47 59, 5	2 20, 3	5, 468	
48 33	2 53, 8	8, 391	0, 01
49 7	3 27, 8	12, 195	0, 01
49 35	3 55, 8	15, 446	0, 02
50 9	4 29, 9	20, 235	0, 04
50 41	5 1, 9	25, 318	0, 06
51 13, 5	5 34, 4	31, 062	0, 09
51 50	6 10, 9	38, 213	0, 14
52 19, 5	6 40, 4	44, 534	0, 19
53 32	7 53, 0	62, 147	0, 37
54 7	8 28, 0	71, 685	0, 51
54 36, 5	8 57, 5	80, 253	0, 65
55 11	9 32, 1	90, 917	0, 82
55 51	10 12, 1	104, 074	1, 08
56 25	10 46, 1	115, 958	1, 34
57 4	11 25, 1	130, 378	1, 70
57 36	11 57, 1	142, 843	2, 03
58 7	12 28, 2	155, 501	2, 41
58 41	13 2, 2	169, 955	2, 89
Somme . . .	+ 2h 2′, 15″, 5	1421, 186	14, 50

Arc parcouru après 30 répétitions		1469° 0′ 13″, 50
Réductions au Méridien	−	43 25, 63
Variation de la déclinaison du Soleil	−	1 58, 62
Variation de la Réfraction	+	1, 75
Arc réduit		1468 14 51, 00
Arc simple ou dist. app. au Zénith		48 56 29, 70
Réfraction vraie	+	1 4, 51
Parallaxe	−	6, 55
Vraie distance au Zénith		48 57 27, 66
Déclinaison vraie du Soleil australe	−	3 53 28, 77
Latitude observée		45° 3′ 58″, 89

1809 *le* 5 *octobre.*

Midi au Chronomètre	23h 43′ 47″, 21
Marche horaire du Chronomètre, y compris la variation de l'équat. du tems	— 1, 60
Variation horaire du Soleil en déclinaison . .	+ 57, 917

Barom. 27 pouces 4, 0 lignes.
Therm. + 13°, 0.

TEMS DU CHRONOMÈTRE.	ANGLE HORAIRE a	aa	$\left(\frac{aa}{100}\right)^2$
23h 37′ 36″, 5	— 6′ 10″, 9	38, 213	0, 14
37 59	5 48, 4	33, 718	0, 11
38 27	5 20, 4	28, 516	0, 07
38 50	4 57, 4	24, 569	0, 06
39 18, 5	4 28, 9	20, 086	0, 04
39 44	4 3, 4	16, 457	0, 03
40 11	3 36, 3	12, 996	0, 01
40 33, 5	3 13, 9	10, 444	0, 01
41 0	2 47, 4	7, 784	
41 25	2 22, 3	5, 626	
42 31, 5	1 15, 7	1, 591	
42 55	52, 2	0, 757	
43 25, 5	21, 7	0, 130	
43 48	+ 0, 8	0, 001	
44 17	29, 8	0, 247	
44 51, 5	1 4, 3	1, 149	
45 27	1 39, 8	2, 767	
45 52, 8	2 5, 7	4, 389	
46 24	2 36, 9	6, 838	
46 50	3 2, 9	9, 293	0, 01
48 42	4 55, 0	24, 174	0, 06
49 22	5 35, 0	31, 174	0, 10
50 1	6 14, 0	38, 854	0, 14
50 27	6 40, 0	44, 445	0, 19
50 53, 5	7 6, 6	50, 552	0, 25
51 14	7 27, 1	55, 528	0, 30
51 41	7 54, 1	62, 436	0, 38
52 6	8 19, 1	69, 195	0, 48
52 37	8 50, 1	78, 058	0, 61
52 59	9 12, 2	84, 701	0, 71
Somme	+ 37′ 54″, 5	764, 688	3, 70

Arc parcouru après 30 répétitions	1491°	50′	50″, 00
Réductions au Méridien	—	23	4, 83
Variation de la déclinaison du Soleil	—		36, 49
Variation de la Réfraction	+		0, 90
Arc réduit	1491	27	9, 58
Arc simple ou dist. app. au Zénith	49	42	54, 32
Réfraction vraie	+	1	5, 67
Parallaxe	—		6, 64
Vraie distance au Zénith	49	43	53, 35
Declinaison vraie du Soleil australe.	— 4	39	55, 51
Latitude observée	45°	3′	57″, 84

RÉSUMÉ DES OBSERVATIONS DU SOLEIL.				
1809.	NOMBRE d'observations du jour.	LATITUDE. Résultats simples.	NOMBRE d'observations réunies.	LATITUDE Résultats combinés.
Sept. 29	20	45° 3′ 58″, 46	20	45° 3′ 58″, 46
30	30	59 , 00	50	58 , 78
Oct. 2	30	61 , 65	80	59 , 86
3	30	58 , 89	110	59 , 59
5	30	57 , 84	140	59 , 22

Le Soleil donne par conséquent pour la latitude

45° 3′ 59″,22

En faisant concourir toutes ces observations, nous aurons le tableau général suivant :

Latitude de l'Observatoire Impérial.

par 130 observations	de la Polaire . .	45° 3′ 59″,85
60	d'Atair	60 ,43
140	du Soleil	59 ,22
par 330 observations	. . . .	45° 3′ 59″,83.

Ce milieu se rapproche tout à fait de l'observation de la Polaire, dont effectivement la déclinaison est la mieux connue. Ainsi nous avons définitivement pour la latitude de l'Observatoire Impérial de Turin

45° 3′ 59″,83.

Longitude de l'Observatoire Impérial de Turin.

J'avais vivement desiré de pouvoir faire l'observation de l'occultation de deux étoiles par la lune de δ^1 et de δ^2 du Taureau, qui eut lieu pendant mon séjour à Turin, le 28 septembre, ç'aurait été un moyen sûr de déterminer la longitude de l'Observatoire. Je m'y étais bien préparé, et j'avais pris à cet effet un bon nombre de hauteurs correspondantes du Soleil soit au cercle-répétiteur, soit au sextant. L'état du ciel pendant la journée avait fait espérer de pouvoir faire cette importante observation ; le soir vers les 7 heures, j'avais encore pû prendre les distances méridiennes de la claire de l'aigle, mais vers les 8 heures tout le ciel se couvrit de nuages épais, ce qui m'empêcha, à mon grand regret, de faire l'observation de cet eclipse, ainsi que celle des distances méridiennes de la Polaire ce même jour. En attendant j'ai déterminé cette longitude par mes chronomètres, avec lesquels j'avais apporté le tems de l'Observatoire de Milan. Le 29 septembre j'avais trouvé mes chronomètres par un milieu, en retard sur

le tems vrai de Turin	8′ 26″,15
ils étaient le même jour en retard sur le tems vrai de l'Observatoire de Milan	2 22, 35
Différence des Méridiens entre les Observatoires de Turin et Milan	6′ 3″, 80

Les Astronomes de Brera font la différence de longitude entre leur Observatoire

et celui de Paris 27 25, 00

Donc différence de longitude entre les Observatoires de Turin et Paris . . . . 21′ 21″,20

Ce qui donne pour la longitude de l'Observatoire Impérial de Turin

25° 20′18″,0

Azimuths observés avec le Soleil à Turin.

Nous avons fait ces observations azimuthales avec le théodolite répétiteur, dont nous avons parlé plus haut en trois endroits. A l'Observatoire Impérial; à un des termes de la base du P. BECCARIA hors la porte Susine; et à la Supergue. Le tems vrai étant un élément essentiel pour le calcul des Azimuths, nos chronomètres étaient toujours réglés par un bon nombre de hauteurs correspondantes prises assidûment tous les jours. Mais lorsque nous nous sommes transportés à la base de BECCARIA et à Supergue, pour y prendre les Azimuths, nous n'avons fait qu'y porter un de nos chronomètres réglé sur le tems de l'Observatoire Impérial, mais comme nous connaissions la différence des Méridiens de tous ces points avec avec une grande précision (par des moyens que nous exposerons bientôt) il était assez inutile d'y observer le tems. Nous prîmes seulement la précaution de comparer le chronomètre emporté avant de partir et après le retour, aux autres chronomètres que nous avions laissés à l'Observatoire.

Nous employâmes différentes méthodes pour observer ces Azimuths, nous avions deux manières d'éluder le demi-diamètre du Soleil. Nous prîmes d'abord une série d'observations du I Bord du soleil, qui se suivaient assez près, ensuite une seconde série du même nombre d'observations du II Bord, le milieu nous donnait le centre du Soleil. Ou bien, nous fîmes une observation du I Bord du Soleil, laissâmes l'instrument immobile sur la même division jusqu'à ce que le diamètre du Soleil eût traversé le fil vertical de la lunette, et prîmes ensuite le II Bord, le milieu de ces deux tems observé répond au passage du centre par le fil. On perd plus de tems à cette seconde méthode; puisqu'il faut attendre tout le tems que le diamètre du Soleil met à passer le fil, au lieu que dans la première méthode les observations peuvent se succéder aussi vîte que l'on voudra. On aurait aussi pû observer pendant la répétition, alternativement les deux bords du Soleil. Nous avons employé toutes ces méthodes, elles reviennent au même, et nous ont toujours donné à peu-près les mêmes résultats, en voici les détails.

I.re Station.

Observatoire Impérial de Turin.

Latitude 45° 3′ 59″,83. Longitude en tems =21′ 21″, 3 à l'est de Paris.

Ces observations ont été faites sur la galerie qui règne autour de la salle d'observation.

Le théodolite était placé dans le coin sud-est de cette galerie, et les Azimuths ont été pris avec le Soleil couchant et la croix de la coupole de la magnifique église de Supergue.

1809 *le* 28 *Septembre*, *au soir.*

AZIMUTHS SIMPLES ET NON MULTIPLIÉS, PRIS AVEC LE SECOND BORD DU SOLEIL.

Tems vrai et angle horaire.	Distance obser. entre le II bord du Soleil et la coup. de Supergue.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direct. de la coup. de Supergue avec le Méridien de l'Observatoire.	MILIEU.
3h 39' 42" 62	164° 32' 25"	62° 11' 58",3	102° 20' 26",7	
40 22, 15	40 40	20 2,5	37,5	
40 49, 66	46 20	26 4,8	15,2	II bord ☉
41 16, 68	52 10	31 44,9	25,1	102°20'26",1
41 41, 50	57 25	36 59,0	26,0	

AZIMUTHS SIMPLES PRIS AVEC LE PREMIER BORD DU SOLEIL.

Tems vrai et angle horaire.	Distance obser. entre le I bord du Soleil et la coup. de Supergue.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direct. de la coup. de Supergue avec le Méridien de l'Observatoire.	MILIEU.
3h 42' 13",73	164° 29' 10"	62° 43' 43",4	101° 45' 26",6	
42 43,75	35 25	50 0,9	24,1	
43 8,26	40 40	55 7,7	32,3	I bord ☉
43 38,57	47 0	63 1 27,0	33,0	101°45'30",4
44 7,99	53 10	7 35,8	34,2	

Centre du Soleil = 102° 2' 58",3

AZIMUTHS SIMPLES, RÉDUITS PAR L'OBSERVATION DE DEUX BORDS AU CENTRE DU SOLEIL.

Tems vrai et angle horaire.	Distance obser. entre le centre du Soleil et la coup. de Supergue.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direct. de la coup. de Supergue avec le Méridien de l'Observatoire.	MILIEU.
3h 47′ 36″,67	165° 54′ 5″	63° 50′ 56″,5	102° 3′ 8″,5	
50 45,55	166 33 0	64 29 52,1	3 7,9	Centre ☉
53 54,67	167 11 30	65 8 36,3	2 53,7	102° 3′ 1″,2
4 0 25,81	168 30 45	66 27 50,3	2 54,7	

Milieu de 14 observations	102° 2′ 59″,8
Réduction au centre de l'Observatoire	— 3 40,8
Vrai angle de direction compté du Sud à l'Est	101° 59′ 19″,0

1809 *le 30 septembre, le matin à-peu-près à la même station sur la galerie.*

AZIMUTHS MULTIPLIÉS, PRIS AVEC LE SECOND BORD DU SOLEIL.

TEMS vrai.	ANGLE horaire.	Distance obser. et multipliée entre le II bord du Sol. et la coup. de Superg.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direction de la coupole de Supergue avec le Méridien de l'Observ.	II BORD du Soleil.
20h 8′ 9″,56	3h 51′ 50″,44	38° 4′ 5″	1	38° 4′ 5″, 0	64° 16′ 31″,6	102° 20′ 36″, 6	
9 4 ,49	50 55 ,51	76 30 35	2	38 15 17, 5	64 5 15 ,0	32 , 5	
9 50 ,55	50 9 ,45	115 14 40	3	38 24 53, 3	63 55 46 ,6	39 , 9	102° 20′ 39″, 9
20 12 56,25	3 47 3 ,75	39 3 10	1	39 3 10	63 17 25 ,6	102 20 35 , 6	
14 6 ,54	45 53 ,46	78 35 25	2	39 17 42, 5	63 2 51 ,5	34 , 0	
15 6 ,66	44 53 ,34	118 30 55	3	39 30 18, 3	62 50 21 ,3	39 , 6	102° 20′ 39″, 6

Milieu . . . . . 102° 20′ 39″, 8

AZIMUTHS MULTIPLIÉS, PRIS AVEC LE PREMIER BORD DU SOLEIL.

TEMS vrai.	ANGLE horaire.	Distance obser. et multipliée entre le 1.er bord du Soleil et la coup. de Superg.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direction de la coupole de Supergue avec le Méridien de l'Observ.	I BORD du Soleil.
h 20 19' 19",49	h 3 40' 40",51	39° 48' 50"	1	39° 48' 50"	61° 57' 26", 5	101° 46' 16", 5	
20 7,42	39 52,58	79 57 45	2	39 58 52, 5	61 47 22, 8	15, 3	
20 54,32	39 5,68	120 26 10	3	40 8 43, 3	61 37 27, 0	10, 3	101° 46' 10", 3
20 24 16,68	3 35 43,32	40 51 30	1	40 51 30	60 54 36, 4	101 46 6, 4	
24 54,46	35 5,54	81 58 55	2	40 59 27, 5	60 46 33, 3	0, 8	
25 39,84	34 20,16	123 27 30	3	41 9 10	60 36 52, 6	2, 6	101° 46' 2", 6

Milieu de 12 observations . . . . 101° 46' 6", 5

Centre du Soleil 102 3 23, 2

Réduction au centre de l'Observatoire . . . . — 4 5, 5

Vrai angle de direction . . . . 101° 59' 17", 7

1809 le 30 septembre au soir.
Le Théodolite était placé dans le coin Nord-Ouest de la galerie.

AZIMUTHS MULTIPLIÉS, PRIS AVEC LE CENTRE DU SOLEIL, EN PRENANT UN MILIEU DE DEUX BORDS.

TEMS VRAI et l'angle horaire.	Distance observée et multipliée entre le centre du Soleil et la coup. de Supergue.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé	Angle de direction de la coupole de Supergue avec le Méridien de l'Observatoire.	CENTRE du Soleil.
3h 50′ 8″, 07	165° 46′ 5″	1	165° 46′ 5″	63° 50′ 26″, 3	101° 55′ 38″, 7	
52 7, 53	332 21 0	2	166 10 30	64 14 55, 2	34, 8	101° 55′ 34″, 8
3 58 21, 68	167 26 35	1	167 26 35	65 30 53, 9	41, 1	
4 0 19, 38	335 40 25	2	167 50 12, 5	65 54 36, 2	36, 3	101 55 36, 3
4 6 13, 15	169 0 45	1	169 0 45	67 5 15, 2	29, 8	
8 21, 28	338 52 15	2	169 26 7, 5	67 30 38, 4	29, 1	101 55 29, 1
4 14 56, 87	170 43 50	1	170 43 50	68 48 21, 4	28, 6	
17 11, 20	342 20 5	2	171 10 2, 5	69 14 32, 1	30, 4	101 55 30, 4
4 23 43, 46	172 25 55	1	172 25 55	70 30 22, 0	33, 0	101 55 33, 0

Milieu de 9 observations du centre du Soleil . . . . 101° 55′ 32″, 7
Réduction au centre de l'Observatoire . . . . + 3 50, 5

Vrai angle de direction . . . . 101° 59′ 23″, 2

RÉSUMÉ DES AZIMUTHS DE LA COUPOLE DE SUPERGUE, OBSERVÉS A' L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE TURIN.

1809.	NOMBRE D'OBSERVATIONS.	Angle de direction avec le Méridien de l'Observatoire du Sud à l'Est.
28 Sept. soir.	14	101° 59′ 19″, 0
30 — matin.	12	17, 7
30 — soir.	9	23, 2

Résultats définitifs des 35 observations . . . . 101° 59′ 20″, 0

IIe STATION.

Terme de la Base du P. BECCARIA, *près Turin, hors de la Porte Susine.*

Le Père BECCARIA ayant mesuré sa base sur le grand chemin, qui conduit de Turin à Rivoli, en a marqué les termes par deux pierres qu'il a fait enfouir. Il donne dans son ouvrage *Gradus Taurinensis* pages 11 et 15, les indications nécessaires pour les retrouver. Mais les termes d'allignemens qu'il assigne, étant des arbres de l'allée qui bordent ce chemin, et pouvant être détruits avec le tems, et même les pierres enterrées pouvant être remuées ou déplacées, la Ville de Turin jalouse de perpétuer la mémoire et connaissance d'un Monument de la science si utile à maintenir, en a assuré

la conservation. La Commune a par conséquent ordonné l'érection de deux pyramides aux deux extrémités de la base; M.r le Préfet Etienne Vincent ayant approuvé ce projet, s'est adressé pour l'exécution aux deux Membres de l'Académie Impériale, Messieurs les Professeurs Vassalli-Eandi et Bidone, qui ont été chargés de la pose de ces pyramides. Ils eûrent la complaisance de me conduire au terme oriental de cette base et de m'y donner tous les renseignemens nécessaires. M.r le Professeur Bidone eût la bonté d'y ajouter encore un extrait du procès-verbal de l'opération, à laquelle ils ont procédé le 7 décembre 1808, pour poser la première pierre, et pour s'assurer de la distance et de la direction de l'axe de la pyramide avec la base et la pierre du P. Beccaria, et dont voici littéralement la teneur:

« Opération faite le 7 décembre 1808 par MM. » Vassalli-Eandi, Bidone, et Capel pour la pose de » la pyramide près de Turin au commencement de la » base du P. Beccaria.

» M.r Capel artiste mécanicien de l'Académie ayant » placé le centre du cercle-répétiteur de sa construc- » tion sur le milieu de la plaque métallique scellée dans » la pierre posée par le P. Beccaria à l'extrémité de » sa base près de Turin, s'aligna avec la lunette de » l'alidade au milieu de la croisée de la fenêtre au » nord qui est dans le pavillon du château de Rivoli » au troisième étage.

» Le milieu de cette fenêtre se trouve précisément
» sur l'alignement de la base du P. BECCARIA, ainsi
» qu'on s'en était assuré auparavant cela fait, M.r
» CAPEL tourna l'alidade de l'instrument vers le nord,
» et à angle droit avec le premier alignement, le
» nouveau rayon visuel donnait dans l'axe de la pyra-
» mide, qui est élévée sur le bord du grand chemin
» de Turin à Rivoli, vis-à-vis la pierre du P. BECCA-
» RIA. Cette opération ayant été répétée plusieurs fois,
» soit pour l'alignement, soit par rapport aux angles,
» et chacun s'étant assuré de son exactitude, on chassa
» dans la face sud de la pyramide à l'endroit où don-
» nait le rayon visuel, un clou pour indiquer la di-
» rection du plan vertical passant par l'axe de la py-
» ramide.

» On mesura ensuite la distance entre l'axe de la
» pyramide, et le milieu de la plaque métallique scellée
» dans la pierre du P. BECCARIA. Cette distance s'est
» trouvée de *neuf mètres*. Ainsi en partant de l'axe de
» la pyramide avec une droite perpendiculaire à sa
» face sud, et en prolongeant vers le midi cette per-
» pendiculaire de neuf mètres, comptés de l'axe de
» la pyramide, on retombe sur le milieu de la pierre
» posée par le P. BECCARIA.

Après des renseignemens aussi clairs et précis, il était impossible de manquer la pierre du P. BECCARIA et j'y ai établi conformément mon théodolite-répétiteur.

1809 *le* 1.er *Octobre le matin.*

Les Azimuths ont été multipliés avec les deux bords du Soleil et la Coupole de Supergue. Nous avons supposé la latitude de ce terme 45° 4′ 30″,2, la longitude = 21′ 17″,69 en tems de Paris, ou 3″,51 en tems à l'Ouest de l'Observatoire Impérial de Turin.

TEMS vrai.	ANGLE horaire.	Distance obser. et multipliée entre le II bord du Soleil et la coup. de Superg.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direction de la coupole de Supergue du Sud à l'Est.	MILIEU.
19h 30′ 54″,88	4h 29′ 5″,12	22° 22′ 25″	1	22° 22′ 25″	71° 21′ 42″, 3	93° 44′ 7″, 3	
31 49 ,48	28 10 ,52	45 2 15	2	22 31 7, 5	11 17 , 0	(42 24 , 5)*	
32 14 ,83	27 45 ,17	67 53 35	3	22 37 51, 7	6 26 , 3	44 18 , 0	
32 46 ,32	27 13 ,68	90 55 25	4	22 43 51, 3	0 24 , 3	15 , 6	
33 19 ,09	26 40 ,91	114 10 35	5	22 50 7	70 54 7 , 0	14 , 0	II Bord ☉
33 53 ,48	26 6 ,52	137 40 25	6	22 56 44, 2	47 32 , 3	16 , 5	93° 44′ 16″, 5

(*) Nous avons rejetté la seconde observation évidemment défectueuse, nous n'avons pû decouvrir la cause de cette erreur. Elle provient probablement d'une erreur de lecture sur le limbe de l'instrument.

AZIMUTHS MULTIPLIÉS AVEC LE PREMIER BORD DU SOLEIL.

TEMS VRAI.	ANGLE horaire.	DISTANCE observée et multipliée entre le 1 bord du ☉ et la Coupole de Supergue.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	ANGLE de direction de la Coupole de Supergue du Sud à l'Est.	MILIEU.
19h 40′ 27″,39	4h 19′ 32″,61	23° 39′ 25″	1	23° 39′ 25″	69° 31′ 29″,1	93° 10′ 54″,1	
41 0 ,81	18 59 ,19	47 31 55	2	23 45 57 ,5	25 4 ,5	11 2 ,0	
41 28 ,06	18 31 ,94	71 33 45	3	23 51 15	19 46 ,0	1 ,0	
41 58 ,54	18 1 ,46	95 48 40	4	23 57 10	13 51 ,1	1 ,1	
42 27 ,49	17 32 ,51	120 14 0	5	24 2 48	8 14 ,1	2 ,1	I Bord ☉
43 2 ,26	16 57 ,74	144 57 35	6	24 9 35 ,8	1 26 ,5	2 ,3	93° 11′ 2″,3

Milieu, Centre du Soleil par 11 Observations et Angle de direction avec le Méridien du Terme de la Base du Sud à l'Est . . . . 93° 27′ 39″,4

IIIe Station.

Supergue latitude 45° 4′ 45″,4 longitude 21′ 41″,26 en tems de Paris, ou 20″,06 en tems à l'est de l'Observatoire Impérial de Turin.

Le même jour que nous observâmes les Azimuths à la base de Beccaria, le matin, nous en observâmes le soir à la Supergue avec le soleil couchant, et la coupole de l'église ou plutôt de la chapelle du S.t-Suaire à Turin. Le théodolite était placé dans le haut du dome sur la galerie qui règne autour, mais le pavé de ce corridor étant recouvert de plaques de plomb ne permettait pas de donner une assiette bien solide à l'instrument, de là, peut-être, les différences un peu plus fortes qu'on remarque dans la série de ces observations.

AZIMUTHS MULTIPLIÉS AVEC LE Ier BORD DU SOLEIL.

TEMS VRAI et l'angle horaire.	Distance observée et multipliée entre le I Bord du Soleil et la coup. de S.-Suaire.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé	Angle de direction de la coupole de S.-Suaire du Nord à l'Ouest.	MILIEU.
2^h 30′ 26″,26	36° 45′ 55″	1	36° 45′ 35″	45° 29′ 33″,7	82° 15′ 8″,7	
31 7,66	73 10 35	2	36 35 17,5	45 40 1,0	18,5	
31 51,21	109 13 10	3	36 24 23,3	45 50 56,3	19,6	
32 33,55	144 55 30	4	36 13 52,3	46 1 34,0	26,3	I Bord ☉
33 15,62	180 16 45	5	36 3 21	46 12 7,0	28,0	82° 15′ 28″,0

AZIMUTHS MULTIPLIÉS AVEC LE SECOND BORD DU SOLEIL.

TEMS VRAI et Angle horaire.	Distance observée et multipliée entre le I bord du Sol. et la coup. du S.-Suaire.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Angle de direction de la coupole du S.-Suaire du sud à l'ouest.	MILIEU.
2h 38′ 53″,44	35° 17′ 5″	1	35° 17′ 5″	47° 35′ 55″,5	82° 53′ 0″,5	
39 32 ,58	70 14 50	2	35 7 25	47 45 34 ,2	52 59 ,2	
40 11 ,06	104 53 30	3	34 57 50	47 55 1 ,2	51 ,2	II BORD ☉
40 51 ,37	139 12 5	4	34 48 1,3	48 4 52 ,6	53 ,9	82° 52′ 51″,4
41 32 ,31	173 9 45	5	34 37 57	48 14 54 ,4	51 ,4	

Milieu, Centre du Soleil par 10 observations . . . . . 82° 34′ 9″,7

AZIMUTHS MULTIPLIÉS AVEC LE CENTRE DU SOLEIL.

TEMS VRAI. et Angle horaire.	DISTANCE observée et multipliée entre le centre du Soleil et la Coupole du S.-Suaire.	NOMBRE des multiplications.	ANGLES simples.	AZIMUTH du Soleil calculé.	ANGLE de direction de la Coup. du S.-Suaire du Sud à l'Ouest.	MILIEU.
3h 27′ 44″,73	23° 42′ 50″	1	23° 42′ 50″	58° 51′ 40″,0	82° 34′ 30″,0	82° 34′ 30″,0
3 35 15,80	22 6 25	1	22 6 25	60 28 15,0	82 34 40,0	
3 36 59,15	43 29 10	2	21 44 35	60 50 10,1	45,1	82 34 45,1
3 42 25,89	20 35 50	1	20 35 50	61 58 48,5	82 34 38,5	82 34 38,5

Milieu, Centre du Soleil par 4 observations	82° 34′ 37″,8
Les 10 observations précédentes ont donné	82 34 9,7
Milieu, Centre du Soleil par 14 observations	82 34 23,8
Réduction au centre de la Coupole	+ 1 51,0
Angle de direction de la Coupole du S.-Suaire avec le Méridien de la Coupole de Supergue du Sud à l'Ouest	82 36 14,8
Par conséquent ce même angle compté du Sud à l'Est .	277° 23′ 45″,2

DEUXIÈME PARTIE

Opérations Géodésiques.

Les observations astronomiques étant terminées, il ne s'agit plus que de les comparer aux résultats du P. Beccaria. Mais on sait, que cet astronome avait fait ses observations à Turin en 1763 et 1764 dans un tout autre local de la ville que nous; l'Observatoire Impérial actuel n'existait pas alors, il n'a été achevé qu'en 1791. Le P. Beccaria, avait établi son secteur dans la maison qu'il habitait sur la place du château (*Piazza Castello*, maintenant place Impériale) dans un petit Belvedere qui s'élève par dessus le toit de la maison, et dans lequel M.r Vassalli-Eandi eut la bonté de me conduire, et de m'en procurer l'accès auprès du locataire, pour toutes les opérations que je devais y faire. C'est de ce point que le P. Beccaria avait déterminé la latitude. Pour la comparer à la nôtre, que nous avons observée à l'Observatoire Impérial, il faut la reduire au même point, et pour cela il faut connaître la distance de ces deux points et son Azimuth.

Il existe à la vérité un nouveau plan de la ville de Turin gravé en 1808 et dessiné par l'architecte municipal M.r Laurent Lombardi, duquel j'aurais pu prendre cette distance; mais ne sachant avec quel soin il

avait été levé, j'ai préféré de la déterminer moi-même, afin qu'il ne restât aucune objection ou doute sur la différence de nos latitudes. Il nous fallait par conséquent entreprendre une petite opération trigonométrique, et la commencer par la mesure d'une base. MM. les Professeurs MICHELOTTI et BIDONE me désignèrent l'allée bordée d'arbres, qui conduit de la porte de la ville *Porta nuova* au *Valentin*, comme le local le plus convenable pour cela. M.r DE-PROVANA y avait mesuré autre fois une base, mais dont les termes ont été perdus; effectivement j'ai trouvé une des contre-allées en face de la ville très-propre pour la mesure d'une petite base qui pouvait parfaitement remplir mon objet.

Je fis construire de suite trois perches bien solides et d'un bois bien sec; elles furent étalonnées moyennant des micromètres microscopiques sur un mètre d'acier, que je porte avec moi, et qui a été comparé à Milan et à Turin aux étalons du mètre définitif que MM. les commissaires MASCHERONI et VASSALLI-EANDI avaient apportés de Paris. Les longueurs de ces perches ont été trouvées

la I = 2,7872242883 mètres

la II = 2,7626242883

la III = 2,8089242883

Somme = 8,3587728649 mètres = une portée.

Chaque perche portait un niveau à bulle d'air, on le plaçait sur des billots ou cubes de bois bien équarrés (dont on avait provision de différentes dimensions) et on les mettait de niveau moyennant des petits coins qu'on introduisait et qu'on chassait à petits coups entre les perches et les billots sur lesquels elles reposaient. Les bouts des perches ne se touchaient jamais, on laissait toujours un petit intervalle entr'elles, qu'on mesurait ensuite, en y appliquant une échelle, ou une espèce de vernier, divisé en parties égales, dont une était égale à 0,00192376 parties du mètre.

Lorsque les perches, par l'élévation ou par l'abaissement du terrain ne pouvaient se placer sur la même ligne de niveau, on faisait descendre un fil à plomb du bout de la perche la plus élévée, mais la perche suivante et placée au-dessous ne le touchait pas, le fil à plomb ne faisait que raser l'épaisseur de cette perche, comme ferait le fil à plomb d'un quart de cercle sur son limbe; la petite portion de la perche, coupée par le fil à plomb entre le bout de la perche d'en haut, et le point marqué par ce fil sur la perche d'en bas, a été mesurée avec l'échelle, et portée sur le registre avec un signe négatif —, puisque effectivement la perche au-dessous empiétait sur celle placée au-dessus d'elle de cette petite quantité, qu'il faut par conséquent retrancher de la longueur de la perche. Ainsi toutes les fois qu'on trouvera dans le registre de la mesure de la base l'intervalle des perches marqué négative-

ment, c'est un indice que le fil à plomb avait été appliqué aux perches, ce qui au demeurant n'est arrivé que six fois dans tout le cours de la mesure. On voit que de cette manière les perches n'étaient jamais en contact et que par conséquent, ni leur alignement, ni leur niveau, ni leur emplacement n'ont jamais pû être dérangés. On ne levait la troisième perche, que lorsque les deux autres étaient bien placées.

Comme le terrain de la contre-allée descend vers le *Valentin*, et que la vue aurait été bornée plus bas, le terme de la base n'a point été pris au bout de cette allée, mais près le treizième arbre à droite en la remontant vers la ville. On y a enfoncé à grands coups de marteau un pïeu, dans lequel on a chassé un clou de fer à tête plâte, et dont le centre est le premier point de la base que nous désignerons par la lettre A. C'est sur ce point que le Théodolite fut établi, et après avoir été bien rectifié et bien nivelé, le fil vertical de la lunette plongeante bien fixée sur l'autre terme de la base, nous donna l'alignement ou la ligne droite sur laquelle la base fut mesurée. Le Théodolite resta en permanence sur ce point pendant tout le tems que la mesure de la base avait duré, une personne placée à cet instrument veillait continuellement à ce que les perches fussent placées dans la direction du fil vertical de la lunette, et les perches en étaient toujours coupées.

L'alignement de cette base répondait à un écriteau

de l'Octroi Municipal, attaché à la maison du Receveur à la *Porta nuova*. Cet écriteau est de forme ovale, et le fil vertical de la lunette du Théodolite faisait exactement la tangente de l'ellipse, du côté où est placé le réverbère, c'est-à-dire vers la ville. Voyez à la figure I comme cela se présentait dans la lunette qui renverse les objets. *a b c d* est le compartiment dans lequel est placé sur un fond rouge l'écriteau elliptique, *a c* et *b d* sont deux lisières en blanc, *z* est le réverbère, *x y* le fil vertical de la lunette qui touche la périphérie de l'ellipse.

L'autre terme de la base (B) était au-delà d'un petit ruisseau ou cunette, sur le glacis démoli de la ville, on y a également enfoncé un pieu avec son centre, c'est de ce terme, qu'on a commencé la mesure de la base, elle fut prise avec le plus grand scrupule, et nous y avons employé dix heures de suite en y travaillant depuis 8 heures du matin jusqu'à 6 heures du soir, quoiqu'elle ne fût que de 642 mètres; sa longueur était cependant plus que suffisante pour notre objet.

La mesure de la base achevée, les perches furent soumises une seconde fois à l'étalonnage et on trouva qu'elles n'avaient point changé pendant l'opération. Le jour était beau et parfaitement calme, la variation du thermomètre pendant la mesure très-legère, le matin et le soir il était + 11° et $\frac{1}{2}$; à midi + 13° Réaumur.

REGISTRE DE LA MESURE DE LA BASE

Commencée le 7 octobre 1809 à 8h du matin, et terminée le même jour à 6h du soir.

N.° des PORTÉES	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.
Terme B 1	+ 6 + 16,5 + 12 + 11	6	+ 7,5 + 9,5 + 15	11	+ 3,5 + 7,5 + 7
2	+ 7 + 6 + 4,5	7	+ 12,5 + 5,5 + 5	12	+ 8 + 15,5 + 13
3	+ 3 + 10,5 — 8	8	+ 1,5 + 3 + 11	13	+ 4 + 11,5 + 6
4	+ 4 — 10,5 + 8	9	+ 6 + 19,5 + 4,5	14	+ 9 + 6,5 + 16
5	+ 24,5 + 6 + 12	10	+ 6 + 11,5 + 15,5	15	+ 14 + 2 + 10,5

N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.
Terme B	+ 11		+ 13,5		+ 6
16	+ 11,5	22	+ 6	28	+ 7
	+ 8		+ 7,5		+ 6,5
	+ 7		+ 1		+ 8
17	+ 12,5	23	+ 11,5	29	+ 4
	0		+ 8,5		+ 9
	+ 8		+ 19,5		+ 13
18	+ 8	24	+ 4,5	30	+ 4
	+ 2,5		+ 8,5		+ 11,5
	+ 10		+ 9		+ 7
19	+ 1,5	25	+ 15,5	31	+ 15,5
	+ 3		+ 3		+ 5
	+ 14		+ 1,5		+ 10
20	+ 14,5	26	+ 6	32	+ 9
	+ 7		+ 9,5		+ 2,5
	— 1,5		+ 5,5		+ 16
21	+ 9	27	+ 5	33	+ 17,5
	+ 6		+ 5		+ 8

N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.
Terme B 34	+ 8,5 + 4 + 10	40	+ 12 + 14,5 + 9,5	46	+ 9,5 + 11,5 + 14,5
35	+ 16 + 2,5 + 1	41	+ 2,5 + 14,5 + 7	47	+ 8 + 5,5 + 5
36	+ 21 + 5,5 + 8	42	+ 5,5 + 6,5 + 12	48	+ 4 + 7 + 7,5
37	+ 4,5 + 11 + 13	43	+ 10 + 3 + 8,5	49	+ 6 + 11,5 + 12
38	+ 6 + 5,5 + 10,5	44	+ 5,5 + 4,5 + 6	50	+ 17 + 2 + 5
39	+ 24 + 4 + 15,5	45	+ 6,5 + 8 + 11	51	+ 9 + 15,5 + 5,5

N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.
Terme B	+ 9		+ 7		+ 4
52	+ 5, 5	58	+ 9, 5	64	+ 19
	+ 8		+ 13		+ 19
	+ 10		+ 5, 5		+ 4
53	+ 13	59	+ 8	65	+ 4
	+ 7, 5		+ 11, 5		+ 10, 5
	+ 3, 5		+ 24, 5		+ 6, 5
54	+ 15, 5	60	+ 17	66	+ 2
	+ 16, 5		+ 14, 5		+ 21, 5
	+ 3		+ 5		+ 9
55	+ 4, 5	61	+ 5, 5	67	+ 7, 5
	+ 10		+ 6		+ 11, 5
	+ 17, 5		+ 7, 5		+ 12, 5
56	+ 4, 5	62	+ 5, 5	68	+ 9, 5
	+ 2		+ 9, 5		+ 14
	+ 7		+ 2, 5		+ 11
57	+ 14	63	+ 6	69	+ 3
	+ 7		+ 19, 5		+ 7

N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES.	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.	N.° des PORTÉES	INTERVALLE des perches en parties de l'échelle.
Terme B 70	+ 10,5 + 15 + 5	73	+ 5 + 5,5 + 8	76	+ 8 + 5 + 2,5
71	+ 11 + 12 + 7,5	74	+ 3,5 + 9 + 13,5	+ I.re Perche + 0,573 mètres.	
72	— 3 + 5,5 + 8,5	75	— 2 — 2 + 7,5		

Donc la Base était

MESURÉE DE	CE QUI FAIT EN MÈTRES.
76 Portées	635, 2667377324
+ 1932, 5 Parties de l'Echelle	+ 3, 7176662
+ Perches N.° I	+ 2, 7872242883
+ 0, 573 mètres	+ 0, 573

Somme = 642, 3446282207 mètres

lesquels réduits en toises font définitivement pour la Base, que nous employerons 329,5703 toises, dont le Logarithme = 2,5179481.

La Base étant ainsi déterminée, nous procédâmes à la formation des Triangles. Quatre nous menèrent à la distance de l'Observatoire Impérial à celui du P. Beccaria. Une autre Série de cinq Triangles nous y menait également. Comme nous ne voulions employer que des Triangles dans lesquels nous pouvions observer les trois angles, nous fûmes un peu gênés pour le choix, parce qu'on ne pouvait pas monter avec le Théodolite dans tous les clochers ou coupoles que nous aurions voulu choisir de préférence, par exemple, dans le clocher du Crocefisso, dans la coupole de l'Hôpital, dans celui du St.-Suaire etc. . . . Malgré cela les triangles sont assez bien conditionnés, et d'autant plus exacts, qu'on a toujours observé les trois angles de chaque triangle, qu'ils ont été multipliés dix à douze fois avec le Théodolite-répétiteur, et que leur somme ne différait jamais que de peu de secondes de deux angles droits.

Voici le tableau de ces triangles.

Première Série de quatre triangles. Fig. 2.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTES OPPOSÉS.	LOGARITH. des côtés opposés.
1	Terme A } de la Base	43° 18′ 24″, 5	T 393, 3613	2, 5947916
	Terme B } de la Base	101 36 59, 4	561, 7460	2, 7495399
	Clocher de S.te-Croix.	35 4 36, 1	329, 5703	2, 5179481
2	Terme B de la Base	34 30 27, 4	240, 6891	2, 3814565
	Clocher de S.te-Croix	77 41 36, 4	415, 0959	2, 6181485
	Observat. Impérial	67 47 56, 2	. . . .	. . . . .
3	Clocher de S.te-Croix	34 23 8, 5	315, 8297	2, 4994529
	Observat. Impérial.	120 7 17, 8	483, 7102	2, 6845853
	Clocher de S.t-Jean	25 29 33, 7	. . . .	. . . . .
4	Observat. Impérial	39 54 14, 8	222, 4664	2, 3472644
	Clocher de S.t-Jean	25 42 6, 9	150, 3984	2, 1772432
	Observ. du P. Beccaria	114 23 38, 3	. . . .	. . . . .

Seconde Série de cinq Triangles. Fig. 3.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS OPPOSÉS.	LOGARITH. des côtés opposés.
1	Terme A } de la Base	24° 35' 35'', 3	T 415, 2581	2, 6183181
	Terme B }	136 7 12, 5	691, 6265	2, 8398716
	Observat. Impérial.	19 17 12, 2	329, 5703	2, 5179481
2	Terme A de la Base	18 42 44, 4	240, 6439	2, 3813748
	Clocher de S.te-Croix	112 46 21, 0	. . . .	. . . . .
	Observatoire Impérial	48 30 54, 6	561, 9213	2, 7496755
3	Clocher de S.te-Croix	34 23 8, 5	315, 7702	2, 4993712
	Observatoire Impérial	120 7 17, 8	483, 5970	2, 6844836
	Clocher de S.t-Jean	25 29 33, 7	. . . .	. . . . .
4	Observatoire Impérial	42 16 41, 8	212, 5378	2, 3274363
	Clocher de S.t-Jean	49 33 26, 9	240, 4426	2, 3810113
	Clocher de S.t-François	88 9 51, 3	. . . .	. . . . .
5	Observatoire Impérial	82 10 56, 6	265, 6987	2, 4243895
	Clocher de S.t-François	34 6 41, 4	150, 4032	2, 1772568
	Observ. du P. Beccaria	63 42 22, 0	. . . .	. . . . .

Donc la I Série des Triangles nous donne pour la distance de l'Observatoire Impérial à celui du P. Beccaria . . . . 150,3984 toises

La II.e série la donne de 150,4032

Milieu . . 150,4008

Connaissant la distance des deux Observatoires, il nous reste à chercher l'Azimuth ou l'angle qu'elle forme avec la méridienne, qui passe par le centre de l'Observatoire Impérial. Nous avons trouvé plus haut (page 150) par nos observations azimuthales, que la ligne menée de l'Observatoire Impérial à la coupole de la Supergue fait un angle M O S (fig. 2) avec le méridien de l'Observatoire du point sud vers l'est de . . . . 101° 59′ 20″,0

l'angle S O P entre la coupole de la Supergue et l'Observatoire du P. Beccaria a été trouvé de 29 5 14,9

Donc l'Azimuth de l'Observatoire de Beccaria sera M O P 131 4 34,9

Ou le comptant du point nord, on aura N O P 48 55 25,1

Dans le Triangle rectangle P*op* on connaît la distance O P et l'angle N O P, on trouvera par conséquent la distance de l'Observatoire du P. Beccaria à la méridienne de l'Observatoire Impérial, *p*P=113,325 toises, et sa distance à la perpendiculaire O*p*=98,823 toises;

partant, la différence des latitudes sera en parties des degrés =6",24 l'Observatoire du P. Beccaria plus septentrional, et la différence des longitudes 10",34 à l'est.

Nous avons trouvé plus haut (pag. 141) la latitude de l'Observatoire Impérial .	45° 3′ 59″,83
Différence des latitudes des deux Observatoires	+ 6, 24
Donc latitude de l'Observatoire du P. Beccaria	45° 4′ 6″,07
De même nous avons déterminé par nos chronomètres la longitude de l'Observatoire Impérial	25° 20′ 18″,00
Différence des longitudes des deux Observatoires	+ 10, 34
Donc longitude de l'Observatoire du P. Beccaria	25° 20′ 28″,34

Avant de comparer notre latitude à celle déterminée par le P. Beccaria, il est de toute justice d'en refaire le calcul; car du tems de Beccaria les élémens de ce calcul et les positions des étoiles, n'étaient pas aussi bien connus, qu'ils le sont aujourd'hui. Il faut par conséquent ne s'en tenir qu'à ses observations originales avec le dernier scrupule, mais il faut en déduire la latitude d'après des Données plus récentes et plus exactes que l'Astronomie moderne nous fournit, et c'est ce que nous allons faire.

On trouve page 150 du *Gradus Taurinensis* les dis-

tances apparentes au zénith de trois étoiles, α et δ du Cygne et β du Cocher, telles que le P. Beccaria les a observées en 1763 et 1764 avec son secteur à Turin; et à page 155 la latitude, qu'il en a conclu. Mais il ne dit nulle part de quelles déclinaisons d'étoiles il s'est servi pour arriver à ce résultat.

Nous nous sommes servis, dans notre calcul, des déclinaisons données par M.r Piazzi, les meilleures que nous ayons jusqu'à présent. Nous avons pris la déclinaison de α du Cygne de son *libro sesto* page 19 (1) et celles de deux autres étoiles de son grand catalogue (2), desquelles cependant nous avons retranché une seconde et demie à cause du changement que ce célèbre Astronome fit postérieurement à sa latitude, ainsi qu'il en avertit et qu'il le préscrit lui-même page 77 de son *libro sesto*. D'après cela les déclinaisons moyennes de ces étoiles réduites au 1.er janvier de l'an 1763 seront les suivantes

NOM DES ÉTOILES.	DÉCLINAIS. MOYENNE.	VARIATION ANNUELLE.
α du Cygne	44° 26′ 39″, 32	+ 12″, 44
δ du Cygne	44 33 51, 48	+ 8, 36
β du Cocher	44 53 46, 99	+ 1, 33

(1) Del Reale Osservatorio di Palermo, libro sesto. Palermo 1806.

(2) Praecipuarum stellarum innerrantium positiones mediae, ex observat. habitis in specula Panormitana etc. Panormi 1803.

Delà nous avons calculé la latitude telle qu'elle résulte de l'observation de chaque jour, exactement dans le même ordre, dans lequel le P. Beccaria les a présentées lui-même dans son ouvrage (1), et comme on les trouvera disposées dans les tableaux ci-joints.

Observations d'étoiles faites à Turin 1763 α du Cygne au Sud.

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A' L'OUEST.

1763.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
12 Novembre	0° 37′ 50″, 25	45° 4′ 49″, 44
14	0 37 50 , 25	49 , 11
18	0 37 50 , 25	48 , 72
19	0 37 51 , 62	49 , 99
20	0 37 51 , 62	49 , 89
21	0 37 51 , 62	49 , 79
22	0 37 51 , 62	49 , 70

Milieu . . . . 45° 4′ 49″, 52

(2) Gradus Taurinensis art. III, pag. 150.

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A' L'EST.

1763.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
23 Novembre	0° 36′ 44″, 51	45° 3′ 42″, 44
24	0 36 44, 51	42, 32
25	0 36 44, 51	42, 17
26	0 36 44, 51	42, 04
27	0 36 44, 51	41, 89
3 Décembre	0 36 45, 88	42, 36
4	0 36 45, 88	42, 17
5	0 36 45, 88	42, 00
6	0 36 45, 88	41, 81

Le limbe à l'Est, milieu . . .	45° 3′ 42″, 13
Le Limbe à l'Ouest, milieu . . .	45 4 49, 52
Différence	1 7, 39
Moitié, erreur de collimation . . .	± 33, 70
Latitude vraie	45° 4′ 15″, 83

1763 δ *du Cygne au Sud.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1763	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
11 Novembre	0° 30′ 44″,72	45° 4′ 50″, 56
12	0 30 44 ,72	50 , 29
14	0 30 44 ,72	50 , 28
20	0 30 45 ,63	50 , 02
21	0 30 45 ,63	49 , 86
22	0 30 45 ,63	49 , 70

Milieu . . . . 45° 4′ 50″, 12

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1763	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
25 Novembre	0° 29′ 40″,34	45° 3′ 43″, 82
26	0 29 40 ,34	43 , 63
27	0 29 40 ,34	43 , 44
4 Décembre	0 29 41 ,71	43 , 40
5	0 29 41 ,71	43 , 16
6	0 29 41 ,71	42 , 90

Le limbe à l'Est, milieu	45° 3′ 43″, 39
Le limbe à l'Ouest, milieu	45 4 50 , 12
Différence	1 6 , 73
Moitié, erreur de collimation	± 33 , 36
Latitude vraie	45 4 16 , 75

1764 β *du Cocher au Sud.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1764	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
15 Mars	0° 10′ 48″, 41	45° 4′ 54″, 00
16	0 10 48 , 41	53 , 98
17	0 10 48 , 41	53 , 97
19	0 10 48 , 41	53 , 96
29	0 10 48 , 86	53 , 99
30	0 10 48 , 86	53 , 92
31	0 10 48 , 86	53 , 86

Milieu . . . . 45° 4′ 53″, 95

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1764.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
2 Avril	0° 9′ 44″, 93	45° 3′ 49″, 89
3	0 9 44 , 93	49 , 85
5	0 9 44 , 93	49 . 76
6	0 9 44 , 93	49 , 71
18	0 9 45 , 39	49 , 52
19	0 9 45 , 39	49 . 47

Le limbe à l'Est, milieu	45° 3′ 49″, 70
Le limbe à l'Ouest, milieu	45 4 53 , 95
Différence	1 4 , 25
Moitié, erreur de collimation	± 32 , 13
Latitude vraie	45° 4′ 21″, 83

En rassemblant tous les résultats de ces observations, nous trouvons, qu'ils donnent pour la vraie latitude de l'Observatoire du P. Beccaria.

		NOMBRE D'OBSERVATIONS.
Par α du Cygne . . .	45° 4′ 15″, 83	8
Par δ du Cygne . . .	16 , 75	6
Par β du Cocher . . .	21 , 83	6
Milieu, Résultat définitif de la latitude de Beccaria	45° 4′ 18″,14	
Nous avons déterminé cette latitude . . .	45 4 6 ,07	
Donc différence . . . —	12″,07	

Nous voilà enfin arrivés au dernier résultat qui doit nous faire apprécier les travaux astronomiques du P. Beccaria; il nous présente une erreur de près d'un quart de minute sur la latitude de Turin; erreur très-considérable pour toute position géographique, et tout-à-fait intollérable dans une mesure de degré, et qui doit nous remplir de justes craintes sur les latitudes observées avec le même instrument et avec les mêmes étoiles, aux deux extrémités de l'arc, à Mondovi et à Andrà. Voyons maintenant comment les Azimuths observés par le P. Beccaria s'accordent avec les nôtres.

Le P. Beccaria ne fit point d'observations azimuthales à Turin, il n'en fit qu'à Mondovi et à Andrà avec la même coupole de la Supergue, qui nous a

servi pour le même objet à Turin. Le seul moyen de comparer nos Azimuths avec ceux du P. BECCARIA est de les réduire tous à la coupole de Supergue, et d'en dériver l'Azimuth du clocher de S.t-Jean, ce sera l'Azimuth de comparaison. Mais avant d'entreprendre cette réduction, il sera nécessaire de refaire, comme nous avons fait pour la latitude, le calcul de tous les Azimuths du P. BECCARIA d'après les élémens les plus récents. On trouve les observations originales dans le *Gradus Taurinensis* pages 97 et 98. Nos calculs nous ont donné les résultats suivans :

Andrà 1762, *le* 17 *août du soir.*

AZIMUTHS OBSERVÉS AVEC LE SOLEIL COUCHANT ET LA COUPOLE DE LA SUPERGUE (pages 94 et 95).

TEMS VRAI et Angle horaire.	DÉCLINAISON du Soleil boréale.	Angle entre le centre du Soleil et la Coup. de la Supergue réduit à l'Horizon.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Azimuth de la Supergue compté du Sud vers l'Ouest.
5h 11′ 23″	13° 20′ 9″	81° 26′ 3″	89° 4′ 19″, 1	9° 29′ 37″, 9
5 42 30	13 19 41	86 53 2	83 37 1, 9	9 29 56, 1
5 57 34	13 19 28	89 30 6	81 0 6, 0	9 29 48, 0

Milieu . . . . 9° 29′ 47″, 3

Mondovi 1762, *le* 8 *septembre du soir.*

AZIMUTHS OBSERVÉS AVEC LE SOLEIL COUCHANT ET LA COUPOLE DE LA SUPERGUE.

TEMS VRAI et Angle horaire.	DÉCLINAISON du Soleil boréale.	Angle entre le centre du Sol. et la Coup. de la Supergue réduit à l'Horizon.	AZIMUTH du Soleil calculé.	Azimuth de la Supergue compté du Nord vers l'Ouest.
5h 33′ 25″.	5° 33′ 35″	87° 5′ 12″	90° 39′ 26″, 5	3° 34′ 14″, 5
5 54 21	5 33 15	83 26 21	87 0 30, 4	3 34 9, 4
6 8 26	5 33 2	80 59 20	84 33 34, 5	3 34 14, 5

Milieu . . . . . 3° 34′ 12″, 8

I. *Réduction de l'Azimuth observé à Andrà à la Coupole de la Supergue et au clocher de l'Eglise Métropole de S^t.- Jean.*

Fig. 4.

Angle *a* A S ou Azimuth observé à Andrà avec la coupole de la Supergue	9°	29′	47″, 3
Réduction au centre (voyez *Gradus Taur.* pag. 110)	+	4	0, 0
	9	33	47, 3
Convergence des méridiens . . .	—	4	31, 2
Donc angle N S A, ou Azimuth d'Andrà compté de Supergue du Nord vers l'Ouest	9	29	16, 1
Angle A S R observé à Supergue entre Rivoli et Andrà (*Gradus Taur.* page 65)	102	46	17, 0
Reste l'angle N S R, Azimuth de Rivoli compté du Nord	93	17	0, 9
Angle R S I entre Rivoli et le clocher de S.t-Jean (*Gradus Taur.* pag. 105)	3	34	42, 0
Reste l'angle N S I, Azimuth du clocher de S.t-Jean compté du Nord.	96	51	42, 9

Le complément à 180° donne l'angle s S I ou ce même Azimuth de S.t-Jean compté du Sud	83° 8′ 17″, 1

II. *Réduction de l'Azimuth observé à Mondovi à la Coupole de la Supergue et au clocher de l'Eglise Métropole de St.-Jean.*

Fig. 4.

Angle *m* M S ou Azimuth observé à Mondovi avec la coupole de la Supergue	3° 34′ 12″, 8
Evergence des méridiens	+ 2 32, 0
Angle *s* S M ou Azimuth de Mondovi, compté de Supergue du Sud vers l'Ouest	3 36 44, 8
Angle R S M entre Mondovi et Rivoli (*Gradus Taur.* pag. 63) .	90 19 38, 0
Reste l'angle *s* S R ou Azimuth de Rivoli compté du Sud	86 42 53, 2
Angle R S I entre Rivoli et le clocher de St.-Jean (*Gradus Taur.* pag. 105)	3 34 42, 0
Reste *s* S I, Azimuth du clocher de St.-Jean compté du Sud par l'observation de Mondovi	83 8 11, 2

Nous avons trouvé ce même Azimuth par l'observation d'Andrà .	83 8 17, 1
Différence	5″, 9
et cet Azimuth par un milieu .	83° 8′ 14″, 2

Cette différence est de quelques secondes moindre, que ne la trouve le P. Beccaria par ses calculs et par une autre combinaison plus compliquée.

III. *Réductions de nos Azimuths observés à Turin à la Coupole de la Supergue et au clocher de l'Eglise Métropole de S^t.-Jean.*

Fig. 4.

Nous aurions pû nous contenter pour cette réduction de 35 observations azimuthales de la Supergue faites à l'Observatoire Impérial, mais comme nous en avons fait également à l'un des Termes de la Base de Beccaria et dans la coupole de la Supergue, nous commencerons à les réduire tous à l'Observatoire Impérial pour faire voir l'accord qu'ils présenteront entr'eux.

1. *Réduction des Azimuths observés sur trois Stations à Turin au même point.*

I. Station : *Observatoire Impérial.*

Azimuth de la Supergue q O S compté du Midi vers l'Est (p. 150).	101° 59′ 20″, 0
Complément à 180° ou Azimuth p O S compté du Nord vers l'Est . .	78 0 40, 0

II. STATION: *Terme de la Base de BECCARIA à la Porte Susine.*

Azimuth de la coupole de la Supergue compté du Midi à l'Est (pag. 153)	93° 27′ 39″, 4
Angle entre l'Observatoire Impérial et la coupole de la Supergue . . .	42 26 34, 9
Azimuth de l'Observatoire Impérial compté du Midi à l'Est	51 1 4, 5
Convergence des méridiens . .	— 37, 6
Azimuth du Terme de la Base compté de l'Observ. Impérial du Nord vers Ouest	51 0 26, 9
Angle entre la Supergue et ce Terme de la Base	129 1 18, 1
Azimuth *p* O S réduit à l'Observatoire Impérial	78° 0′ 51″, 2

III. STATION: *Coupole de la Supergue.*

Azimuth du St-Suaire compté du Midi vers l'Ouest (pag. 158) . .	82° 36′ 14″, 8
Angle entre le St-Suaire et l'Observatoire Impérial	4 32 4, 4

Azimuth de l'Observatoire Impérial *s* S O compté du Midi vers l'Ouest.	78°	4′	10″,	4
Convergence des méridiens . .	—	3	34,	0
Azimuth *p* O S réduit à l'Observatoire Impérial	78	0	36,	4

Donc Azimuth de la coupole de Supergue compté vers l'Est du point Nord de la méridienne, qui passe par le centre de l'Observatoire Impérial,

Par 35 observations à la I. station =	78	0	40,	0
Par 12 . . . . . à la II. station =			51,	2
Par 14 . . . . . à la III. station =			36,	4
Milieu par 61 observations	78°	0′	42″,	5

2. *Réduction de cet Azimuth à la Supergue et à St-Jean.*

L'Azimuth *p* O S ci-dessus est . . .	78°	0′	42″,	5
Convergence des méridiens . .	+	3	34,	0
Azimuth *s* S O	78	4	16,	5
L'angle O S I entre l'Observatoire Impérial et le clocher de St-Jean (1).	5	2	54,	2
Angle *s* S I ou Azimuth à Supergue du clocher de St-Jean par nos observations	83	7	10,	7

(1) Voyez dans le grand tableau des Triangles le ▲

Ce même Azimuth selon les observations du P. Beccaria	83°	8′	14″, 2
Différence		1	3 , 5

Ainsi il y a une différence d'une minute et au-delà entre nos Azimuths et ceux du P. Beccaria ; heureusement l'usage que l'on fait de ces Azimuths pour calculer l'arc du méridien compris entre les paralleles extrêmes, n'exige pas dans cet élément une très-grande précision.

Longitude de l'Observatoire du P. Beccaria à Turin.

Nos chronomètres nous ont donné pour la longitude de l'Observatoire Impérial, comme nous l'avons exposé plus haut	25° 20′ 18″, 0
Nos Triangles nous ont donné pour la différence de longitude entre l'Observatoire Impérial et celui de Beccaria (pag. 173) . . .	+ 10 , 34
Donc longitude de l'Observatoire du P. Beccaria . .	25° 20′ 28″, 34

Le P. Beccaria, dit dans son ouvrage (p. 160) qu'il avait déterminé la longitude de son Observatoire d'après ses propres observations d'éclipses, = 25° 14′ 30″.

et qu'elle s'accordait à trois secondes près avec celle que le P. ACETTA avait trouvé vingt-cinq ans avant lui, par des eclipses de satellites de Jupiter, qu'il avait observé avec grand soin dans son Observatoire situé 12″ plus à l'Est que le sien. On trouve ces observations dans différens volumes de la connaissance des tems publiés par M. MARALDI. Mais le P. BECCARIA ne dit pas de quel point il compte sa longitude. M.r VALPERGA-DE-CALUSO nous apprend qu'il la comptait du Bourg de l'Isle de Fer, qu'on plaçait alors à 19° 53′ ou 19° 54 à l'Ouest de l'Observatoire de Paris; il faut donc ajouter 6 minutes à la longitude donnée par BECCARIA pour la réduire à celle qui suppose l'Isle de Fer, à 20° à l'Ouest de Paris, par conséquent la longitude de l'Observatoire, du P. BECCARIA serait de 25° 20′ 30″, qui s'accorde parfaitement avec celle trouvée par nos chronomètres. Effectivement M.r DE-CALUSO ayant trouvé, comme moi, que le nouvel Observatoire est 10″ plus occidental que celui de BECCARIA, met la longitude de cet Observatoire = 25° 20′ 35″, (voyez Mém. de l'Acad. de Turin, vol. 5, p. 111) ce qui s'accorde encore avec notre détermination, et à très-peu de chose près avec celle de la connaissance de tems, qui suppose cette longitude 25° 20′ 0″ pour la place du Château (Piazza Castello) où est situé l'Observatoire du P. BECCARIA.

Continuation des Opérations Géodésiques.

Nous aurions à la rigueur pu nous borner aux opérations trigonométriques exposées plus haut ; leur but principal, la jonction des deux Observatoires, celui du P. Beccaria et l'Observatoire Impérial ayant été rempli. Mais outre que nous avions encore besoin de lier le Terme de la Base du P. Beccaria (Porta Susina) et la coupole de la Supergue à l'Observatoire Impérial, pour pouvoir réduire au même point les Azimuths, que nous y avons observés, nous avons voulu profiter de l'occasion et des circonstances pour étendre un réseau de Triangles sur toute la ville de Turin, espérant que cette opération ne serait pas sans intérêt pour la ville, et qu'elle pourrait bien être favorablement accueillie par l'Académie Impériale des Sciences, à laquelle nous osons présenter ici ce travail. En effet la Base et des Azimuths une fois mesurés, les opérations les plus difficiles et les plus délicates sont faites, il ne s'agit plus que de se transporter avec le Théodolite sur quelques clochers, et d'y prendre des angles. C'est ce que nous avons fait, et c'est par cette voie que nous avons obtenu la position des principaux clochers situés dans l'intérieur, et aux extrémités de la ville, leurs distances, et leur direction par rapport au méridien de l'Observatoire Impérial, d'où enfin nous avons calculé leurs longitudes et latitudes.

Voici le tableau général de nos Triangles. Les angles marqués d'un astérisque, sont des angles conclus.

I. TABLEAU.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
1	A. Terme de la Base	43° 18′ 24″, 5	T 393, 3613	2, 5947916
	B. Terme de la Base	101 36 59 , 4	561, 7460	2, 7495399
	C. Clocher de S.te Croix	35 4 36 , 1	329, 5703	2, 5179481
2	B. Terme de la Base	34 30 27 , 4	240, 6891	2, 3814565
	C. Cloch. de S.te Croix	77 41 36 , 4	415, 0959	2, 6181485
	O. Observatoire impér.	67 47 56 , 2	. . . . .	. . . . . .
3	A. Terme de la Base	24 35 35 , 3	(1) 415, 2581	2, 6183181
	B. Terme de la Base	136 7 12 , 5	691, 6265	2, 8398716
	O. Observatoire impér.	19 17 12 , 2	. . . .	. . . . .
4	A. Terme de la Base	18 42 44 , 4	(2) 240, 6439	2,3 813748
	O. Observatoire impér.	48 30 54 , 6	(3) 561, 9213	2, 7496755
	C. Cloch. de S.te Croix	112 46 21 , 0	. . . . .	. . . . .
5	O. Observatoire impér.	120 7 17 , 8	483, 6786	2, 6845568
	C. Cloch. de S.te Croix	34 23 8 , 5	315, 8001	2, 4994122
	I. Clocher de S.-Jean	25 29 33 , 7	240, 6665	2, 3814157
6	I. Clocher de S.-Jean	49 33 26 , 9	240, 4652	2, 3810523
	O. Observatoire impér.	42 16 41 , 8	212, 5580	2, 3274773
	F. Clocher de S.-Franç.	88 9 51 , 3	. . . . .	. . . . . .

(1) *Le milieu des deux Triangles* 2 *et* 3 *donne* B O = 415, 1770. (T)
(2) *Le milieu des deux Triangles* 2 *et* 4 *donne* C O = 240, 6665.
(3) *Le milieu des deux Triangles* 1 *et* 4 *donne* C A = 561, 8337.

Suite du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTES opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
7	I. Clocher de S.-Jean	75° 15′ 33″, 8	T 265, 6851	2, 4243672
	F. Cloch. de S. Franç.	54 3 9 , 9	222, 4074	2, 3471492
	P. Observ de Beccaria	50 41 16 , 3	. . . .	. . . . .
8	F. Cloch. de S.-Franç.	34 6 41 , 4	150, 4064 (4)	2, 1772662
	O. Observatoire impér.	82 10 56 , 6	. . . .	. . . . .
	P. Observ. de Beccaria	63 42 22 , 0	. . . .	. . . . .
9	O. Observatoire impér.	39 54 14 , 8	222, 4456	2, 3472238
	I. Clocher de S.-Jean.	25 42 6 , 9	150, 3843 (5)	2, 1772026
	P. Observ. de Beccaria	114 23 38 , 3	. . . .	. . . . .
10	C. Cloch. de S.te Croix	112 4 44 , 8	729, 1845	2, 8628374
	I. Clocher de S.-Jean	29 59 34 , 5*	. . . .	. . . . .
	B. Terme de la Base	37 55 40 , 7	. . . .	. . . . .
11	O. Observatoire impér.	172 4 35 , 4	729, 2627 (6)	2, 8628840
	B. Terme de la Base	3 25 20 , 3	. . . .	. . . . .
	I. Clocher de S.-Jean	4 30 4 , 3*	. . . .	. . . . .
12	O. Observatoire impér.	168 38 12 , 4	1003, 1669	3, 0013732
	A. Terme de la Base	3 33 21 , 8	. . . .	. . . . .
	. Clocher de S.-Jean	7 48 25 , 8*	. . . .	. . . . .

(4) *Ce côté* P O *a été calculé par les côtés* O F *et* F P

(5) *Le milieu des deux Triangles* 8 *et* 9 *donne* PO = 150,T3954

(6) *Le milieu des deux Triangles* 10 *et* 11 *donne* BI = 729, 2236

SUITE du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTES opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
	C Clocher de S.te Croix	147° 9′ 29″, 5	T 1003, 1100 (7)	3, 0013485
13	A. Terme de la Base	15 9 31, 8	. . . .	. . . . .
	I. Clocher de S.-Jean	17 40 58, 7	. . . .	. . . . .
	A. Terme de la Base	95 41 40, 0	673, 7660	2, 8285091
14	B. Terme de la Base	55 10 46, 2	555, 8681	2, 7449717
	M. Coupole del Monte	29 7 33, 8*	. . . .	. . . . .
	B. Terme de la Base	80 56 40, 0	733, 7365 (8)	2, 8655402
15	O. Observatoire impér.	65 5 23, 7	. . . .	. . . . .
	M. Coupole del Monte	33 57 56, 3*	. . . .	. . . . .
	A. Terme de la Base	71 6 4, 7	733, 6460 (9)	2, 8654866
16	O. Observatoire impér.	45 48 11, 5	. . . .	. . . . .
	M. Coupole del Monte	63 5 43, 8*	. . . .	. . . . .
	B. Terme de la Base	84 22 0, 3	942, 9890 (10)	2, 9745067
17	I. Clocher de S.-Jean	45 20 9, 9	. . . .	. . . . .
	M. Coupole del Monte	50 17 49, 8*	. . . .	. . . . .
	A. Terme de la Base	67 32 42, 9	942, 8136 (11)	2, 9744258
18	I. Clocher de S.-Jean	33 1 39, 8	. . . .	. . . . .
	M. Coupole del Monte	79 25 37, 3*	. . . .	. . . . .

(7) *Le milieu des deux Triangles 12 et 13 donne* AI = 1003, 1385.
(8) *Ce côté* OM *a été calculé par les côtés* BM *et* OB.
(9) *Ce côte* OM *a été calculé par les côtés* AM *et* OA. *Le milieu des deux Triangles 15 et 16 donne* OM = 733,T6912.
(10) *Ce côté* IM *a été calculé par les côtés* IB *et* BM.
(11) *Ce côté* IM *a été calculé par les côtés* AI *et* AM. *Le milieu des deux Triangles 17 et 18 donne* IM = 942,T 9013.

Suite du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
	C. Clocher de S te Croix	24° 33′ 40″, 3	T 122, 3322	2, 0875408
19	O. Observatoire impér.	100 34 44 , 5	289, 3023	2, 4613519
	K. Clocher de S.-Charles	54 51 35 , 2*	. . . .	. . . . .
	B. Terme de la Base	51 20 15 , 0	355, 0765	2, 5503219
20	O. Observatoire impér.	62 44 18 , 7	404, 2271	2, 6066255
	H. Clocher de S.-Mich.	65 55 26 , 3*	. . . .	. . . . . .
	O. Observatoire impér.	48 56 56 , 7	313, 9109	2, 4968064
21	B. Terme de la Base	45 10 50 , 0	295, 2647	2, 4702116
	D. Coup. de l'Hôpital	85 52 13 , 3*	. . . .	. . . .
	O. Observatoire impér.	88 52 38 , 2	342, 3246	2, 5344382
22	I. Clocher de S.-Jean	23 51 8 , 2	138, 4560	2, 1413112
	E. Cloch. de S.te Thér.	67 16 13 , 6*	. . . .	. . . . .
	A. Terme de la Base	36 51 40 , 0	328, 0345	2, 5159195
23	B. Terme de la Base	106 4 35 , 0	525, 4511	2, 7205323
	R. Cloch. del Crocefisso	37 3 45 , 0*	. . . .	. . . . .
	O. Observatoire imper.	51 22 45 , 9	. . . .	. . . . . .
24	B. Terme de la Base	30 2 55 , 0	210, 2400 (12)	2, 3227154
	R. Cloch. del Crocefisso	98 34 19 , 1*	. . . .	. . . . .

(12) *Ce côté* O R *a été calculé par les côtés* OB *et* RB.

Suite du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
25	O. Observatoire impér.	65° 19′ 27″,5	T 296, 2540	2,4716643
	I. Clocher de S. Jean	39 3 47 ,2	205, 4530	2, 3127126
	T. Cloch. S.-Martinien	75 36 45 ,3*	. . . .	. . . . .
26	O. Observatoire impér.	41 29 29 ,0	225, 1860	2, 3525413
	I. Clocher de S.-Jean	26 48 12 ,0	153, 2707	2, 1854591
	U. Cloch. de S.-Thomas	111 42 19 ,0*	. . . .	. . . . .
27	O. Observatoire impér.	43 58 44 ,2	236, 8220	2,3744221
	I. Clocher de S.-Jean	68 12 22 ,4	316, 6724	2, 5006102
	G. Clocher des Jésuites	67 48 53 ,4*	. . . .	. . . . .
28	O. Observatoire impér.	47 26 4 ,5	220, 2088	2, 3428346
	F. Cloch. S.-François	79 1 37 ,4	293, 5250	2,4676450
	V. Coup. du S.-Suaire	53 32 18 ,1*	. . . .	. . . . .
29	O. Observatoire impér.	80 42 34 ,3	345, 4830	2, 5384266
	I. Clocher de S.-Jean	34 51 21 ,5	200,0733	2, 3011891
	L. Cloch. de S.-Fr. de Paule	64 26 4 ,2*	. . . .	. . . . .
30	O. Observatoire impér.	19 9 26 ,5	104, 8436	2,0205418
	I. Clocher de S.-Jean	62 7 53 ,2	282, 4324	2, 4509145
	N. Clocher du S.-Esprit	98 42 40 ,3*	. . . .	. . . . .

Suite du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
31	O. Observatoire impér.	70° 55′ 16″,0	T 303,3553	2,4819516
	I. Clocher de S.-Jean	29 23 36 ,3	157,5418	2,1973957
	Z. Tour Faverge ou Graneri.	79 41 7 ,7*	. . . .	. . . . .
32	O. Observatoire impér.	55 20 43 ,0	221,3275	2,3450354
	C. Cloch. de S.te Croix	8 5 42 ,5	37,8884	1,5785058
	Q. Cloch. S.-Phil. Neri	116 33 34 ,5*	. . . .	. . . . .
33	O. Observatoire impér.	50 0 38 ,8	. . . .	. . . . .
	S. Coup. de Supergue	2 5 15 ,4	159,3198	2,2022698
	X. Guérite de la Tour du Château	127 54 5 ,8*	3450,849 (13)	3,5379260
34	O. Observatoire impér.	107 27 31 ,5	338,2210	2,5292005
	C. Cloch de S te Croix	29 47 32 ,5	176,1430	2,2458653
	t.° Télégr. du Château	42 44 56 ,0*	. . . .	. . . . .
35	O. Observatoire impér.	107 48 59 ,5	331,7795	2,5208496
	C. Cloch. de S.te Croix	28 30 53 ,0	166,3992	2,2211512
	t. Autre Télégraphe	43 40 7 ,5*	. . . .	. . . . .
36	O. Observatoire impér.	121 51 54 ,0	406,7017	2,6092761
	C. Cloch de S.te Croix	27 57 53 ,0	224,5552	2,3513238
	Y. Coup. de S.-Laurent	30 10 13 ,0*	. . . .	. . . . .

(13) *Voyez le ▲ N.° 3 du II Tableau.*

Suite du I Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
	O. Observatoire impér.	135° 35′ 6″, 5	418, 8752	2, 6220847
37	C. Cloch. de S.te Croix	20 42 19, 0	211, 6143	2, 3255449
	r Cloch. S.te Trinité	23 42 34, 5*	. . . .	. . . . . .
	O. Observatoire impér.	25 42 48, 0	200, 0636	2, 3011682
38	F. Cloch. S.-François	122 51 16, 9	387, 3597	2, 5881145
	b Cloch. de la Basilique	31 25 55, 1*	. . . .	. . . . . .
	O. Observatoire impér.	100 31 7, 3	. . . .	. . . . . .
39	S. Coup. de Supergue	8 19 28, 2	527, 9365	2, 7225817
	c. Coup. de la Consolata	71 9 24, 5*	. . . .	. . . . . .
	O. Observatoire impér.	36 30 35, 0	188, 2600	2, 2747579
40	I. Cloch. de S.-Jean	57 5 30, 2	265, 6457	2, 4243028
	e. Cloch. de S.-Rocco	86 23 54, 8*	. . . .	. . . . . .

Les Triangles N.° 11 et 12 sont des Triangles superflus, dont on peut se passer, mais nous les avons mis dans le tableau par manière de vérification, pour faire voir, que malgré que ces Triangles soient du nombre de ceux qu'on appellerait mal conditionnés, ils donnent cependant les distances à quelques pouces près aussi exactes, que les donneraient des Triangles mieux conditionnés, preuve que les angles sont d'une grande exactitude, ce qui n'est pas étonnant, ayant été pris

avec un Théodolite-répétiteur aussi parfait que le notre. Ce qui ajoute encore à leur perfection, c'est que ces angles n'avaient pas besoin d'être réduits à l'Horizon, ayant été observés dans ce plan même, moyennant la lunette plongeante bien vérifiée.

Il nous faut encore les distances de la Supergue à l'Observatoire, au Clocher de St.-Jean, et au Terme de la Base de Beccaria, dont nous avons besoin pour réduire au même point les Azimuths que nous y avons observés. A cet effet, il n'est pas nécessaire de connaître ces distances avec la dernière précision, et nous aurions fort bien pu nous contenter de les prendre dans l'ouvrage de Beccaria, d'autant plus qu'elles y sont déduites de sa grande Base de 6501 toises, au lieu que nous ne pourrions déduire ces distances de 3000 toises et au-delà, que de notre petite Base de 329 toises. Curieux cependant de voir jusqu'à quel point nos mesures se rencontrent avec celles du P. Beccaria, nous avons formé les Triangles suivans, dans lesquels nous n'avons pas toujours pu observer tous les trois angles; il en fallait quelquefois déduire de deux côtés connus et l'angle compris. Voici au reste le Tableau de ces Triangles.

II Tableau.

N.°	NOMS DES STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	COTÉS opposés en toises.	LOGARITH. des côtés opposés.
1	I. Clocher de S.-Jean	65° 7′ 30″, 5	3075, 280 (T)	3,4878848
	M. Coupole del Monte	98 43 27, 5*	3350, 532 (1)	3,5251137
	S. Coup. de Supergue	16 9 2, 0	942, 9013	2,9744662
2	I. Clocher de S.-Jean	105 57 36, 1	3450, 426 (2)	3,5378726
	O. Observat. impérial	68 59 29, 7	3350, 205 (3)	3,5250714
	S. Coupole de Supergue	5 2 54, 2	315, 8001	2,4994122
3	O. Observat. impérial	53 50 31, 2	. . . .	. . . .
	M. Coupole del Monte	115 3 21, 0*	3450, 467 (4)	3,5378779
	S. Coupole de Supergue	11 6 7, 8	. . . .	. . . .
4	I. Clocher de S.-Jean	80 15 29, 2	3319, 962 (5)	3,5211331
	S. Coupole de Supergue	3 47 19, 1	222, 5796	2,3474853
	P. Observ. de Beccaria	95 57 11, 7	. . . .	. . . .
5	S. Coupole de Supergue	8 32 7, 0	758, 9307	2,8802021
	O. Observat. impérial	129 1 18, 1	. . . .	. . . .
	t. Terme de la Base de Beccaria	42 26 34, 9	. . . .	. . . .
6	S. Coupole de Supergue	8 36 7, 7	762, 0594	2,8819888
	O. Observat. impérial	128 45 52, 1	. . . .	. . . .
	p. Pyramide	42 38 0, 2	. . . .	. . . .

(1) *Voyez la note* (11) *du* ▲ *N.°* 18 *du I Tableau.*
(2) *Le milieu des deux Triangles* 1 *et* 2 *donne* S I = 3350,T 3685.
(3) ▲ 5 *du premier Tableau.*
(4) *Ce côté* O S *a été calculé avec le côté* M S = 3450, 467 } *Milieu* 3450.T 849
le côté M O *donne* . . . . 3451, 605 } *Log.* 3, 5379260
le ▲ *N.°* 2 . . . . 3450, 426
(5) *Le milieu des trois Triangles* 7, 9 *du I Tableau et* 4 *du II Tableau donne* I P = 222,T 4775.

Comparons maintenant les distances que nous avons trouvées, avec celles déterminées par le P. Beccaria.

Nous avons trouvé la distance de la coupole de la Supergue au Clocher de St.-Jean par notre Triangle 1 et 2	3350,368 toises
Le P. Beccaria trouve cette distance (*Gradus Taurinensis* pag 150)	3365,16
Différence	+ 14,792
Nous avons encore déterminé la distance de Supergue à l'Observatoire du P. Beccaria, le Triangle 4 nous a donné	3319,962 toises
Le P. Beccaria la trouve (*l. c.*)	3335,47
Différence	15,508

Voilà donc une différence de 15 toises entre nos déterminations et celles de Beccaria, à laquelle nous l'avouons franchement, nous ne nous attendions pas, malgré la petitesse de notre Base et malgré nos Triangles mal conditionnés. Car quelque petite que soit cette Base, il aurait fallu y commettre une erreur de près de deux toises, pour produire celle de 15 toises sur les distances que nous en avons déduites. Or il est de toute impossibilité que nous ayons fait une faute aussi grossière dans la mesure de cette Base, à laquelle nous avions mis autant de tems que de soins. Veut-on chercher la source de cette différence dans les angles observés, il est facile à prouver, qu'il aurait

fallu faire une faute de *vingt* minutes pour produire sur les distances l'erreur en question. Heureusement dans le Triangle qui nous a servi à déterminer la distance de la Supergue à S^{t}.-Jean, tous les trois angles ont été observés, et voici les observations originales :

STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS.	ANGLES CORRIGÉS.
Clocher de S.-Jean	105° 57′ 39″, 7	105° 57′ 36″, 1
Observatoire impérial	68 59 32, 1	68 59 29, 7
Coupole de la Supergue	5 2 54, 4	5 2 54, 2
	180 0 6, 2	180 0 0, 0

On voit donc que sur les trois angles observés de ce Triangle, il n'y avait d'erreur que 6 secondes en excès sur 180 degrés.

On pourrait jeter des soupçons ou sur la toise de Beccaria, ou sur l'étalon de notre mètre, car on sait que les toises de Maupertuis, de Mairan, de la Caille, de Boscovich (1) n'étaient point d'accord. Mais on peut encore démontrer que l'erreur ne tient pas à cette cause. La toise de Beccaria a été comparée avec l'étalon du mètre définitif apporté de Paris. MM. Vassalli-

(1) Astronomie de la Lande, art. 2649.

Eandi et Bidone, conjoinctement avec le mécanicien de l'Académie M. Capel ont trouvé la longueur de cette toise = 1,94861 mètres., le Thermomètre de Réaumur étant + 4°, 6 (1). La toise de Beccaria a été étalonnée à Paris en 1760 par La-Condamine et La-Caille à une température de + 13°, réduisant à la même température (le mètre et la toise étant l'un et l'autre de fer). On trouvera, qu'à la température de + 13° la toise de Beccaria était de 1,948731 mètres.

Mais la véritable toise à cette température est . . . . 1,949037 mètres

Donc la toise de Beccaria est trop courte de . . . . 0,000306 mètres.
ou 0,000157 toises.

Ce qui ne produirait qu'une demie toise sur la distance de 3350 toises, ainsi la différence dont il est question, ne peut provenir de là.

Quant à nôtre mètre (également de fer) et qui nous a servi pour la mesure de nôtre Base, nous les fîmes construire à Milan par M.r Meghele, mécanicien de l'Observatoire de Brera. Il a été comparé moyennant nos micromètres microscopiques à deux étalons du mètre définitif apportés par les commissaires de Paris, à celui de Milan et à celui de Turin. MM. Vassalli-

(1) Notice des travaux de la Classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Académie Impériale des Sciences par A. M. Vassalli-Eandi, secrétaire perpétuel. Turin 1809, pag. CXII.

Eandi, et Bidone assistèrent à la comparaison de celui de Turin, faite dans une des salles de l'Académie Impériale. A une température de + 14°, 22 Réaumur notre mètre était plus grand que l'étalon de Milan de 0,00011482 mètres.

A une température de + 12°, 76 notre mètre était plus grand, que l'étalon de Turin de 0,00008701 mètres. En supposant la dilatation du mètre de fer = 0,00001445 pour un degré du thermomètre de Réaumur, et réduisant à la température de + 13°, notre mètre est plus grand que celui de Milan. 0,000097191 mètre

que celui de Turin . . 0,000090478

Milieu 0,0000938345

Une différence aussi légère n'avait par conséquent aucune influence sur notre Base, ni sur les distances, qui en ont été dérivées.

Nous nous trouvâmes en différence avec Beccaria non seulement pour les grandes distances, mais nous le sommes également pour les petites, que cependant nous avions déterminées avec grande précision, et de différentes manières. Par exemple, nous avons la différence d'une toise avec Beccaria sur une petite distance de 200 toises. Nous avons déterminé la distance de son Observatoire au Clocher de St.-Jean par deux Triangles, très-bien conditionnés, comme on peut le voir dans le I Tableau des Triangles, on y trouvera que

le ▲ 7 nous a donné pour cette distance. 222, 4074 toises
le ▲ 9 nous a donné 222, 4456
le ▲ 4 du II. Tableau quoique mal conditionné nous a cependant donné . 222, 5796

On peut donc supposer avec la plus grande probabilité que cette distance est à quelques pouces près de . . . 222, 4775

Cependant le Triangle de BECCARIA donne pour cette distance 223, 71

Différence . . . . . 1, 2325 toises.

Mais ce qui nous a surpris plus que tout le reste, ce sont les grandes différences que nous avons trouvé dans ce Triangle entre nos angles et ceux du P. BECCARIA, en voici la comparaison :

STATIONS.	ANGLES OBSERVÉS		DIFFÉRENCE.
	DU P. BECCARIA.	LES NÔTRES.	
Coupole de Supergue	3 47′ 34″	3° 47′ 19″, 1	— 0′ 14″, 9
Observ. de Beccaria	95 43 35	95 57 11, 7	+ 13 36, 7
Clocher de S.-Jean	80 28 51 *	80 15 29, 2	— 13 21, 8

On trouve les angles de BECCARIA rapportés page 105 de son *Gradus Taurinensis*, il n'a observé que les

deux angles à la Supergue et à son Observatoire, et il faut conclure le troisième au Clocher de S^t.-Jean. Nous avons observé nos angles à toutes les trois stations, qui sont les mêmes et telles qu'elles existaient du tems du P. Beccaria. A quoi attribuer ces différences? Question qui paraît impossible à résoudre pour le moment.

Ayant établi par les Triangles les distances des points principaux de la Ville et leurs Azimuths, il nous reste à donner les résultats que nous en avons tirés, c'est-à-dire leurs distances directes à l'Observatoire Impérial, leurs angles de direction avec le méridien de cet Observatoire, leurs distances à cette méridienne et à sa perpendiculaire, et de là enfin leurs longitudes et latitudes. Nous les avons calculés dans l'hypothèse de l'aplâtissement de la terre $\frac{1}{310}$, nous avons supposé la latitude de l'Observatoire Impérial en nombre rond 45° 4′ 0″ et la longitude en tems 21′ 21″, 2 à l'Est de l'Observatoire Impérial de Paris.

NOMS des STATIONS.	ANGLES DE DIRECTION comptés du Sud vers l'Ouest.	DISTANCES DIRECTES à l'Observatoire impérial en toises.	DISTANCE à la Méridienne de l'Observatoire impérial.	DISTANCE à la perpendiculaire de l'Observatoire impérial.	LATITUDE.	LONGITUDE.	DIFFÉRENCE des MÉRIDIENS à l'Est de Paris.
		T	T	T			
Observatoire impérial	0° 0′ 0″,0	0,0000	0.	0.	45°4′ 0″,0	25°20′ 18″,0	21′21″,20
Terme B de la Base	16 56 37 ,4	415,1770	120,996 O	397,155 S	45 3 34 ,9	25 20 7 ,2	21 20 ,48
Clocher de S.-Charles	49 43 15 ,1	289 3023	93,328 —	79,089 —	45 3 55 ,0	25 20 9 ,7	21 20 ,65
Cloch. de Sainte-Thérese	100 8 34 ,6	138,4560	136,298 —	24,377 N	45 4 1 ,5	25 20 5 ,8	21 20 ,39
Clocher de S.-Martinien	123 41 45 ,3	205,4530	170,936 —	113,982 —	45 4 7 ,2	25 20 2 ,8	21 20 ,09
Terme de la Base de Beccaria	128 59 24 ,4	758,9307	589,882 —	477,509 —	45 4 30 ,2	25 19 25 ,4	21 17 ,69
Pyramide	129 14 50 ,4	762,0594	590,156 —	482,131 —	45 4 30 ,5	25 19 25 ,4	21 17 69
Clocher des Jésuites	145 2 28 ,6	316,6724	181,449 —	259,534 —	45 4 16 ,4	25 20 1 ,8	21 20 ,12
Clocher de S.-François	146 44 31 ,0	240,4652	131,874 —	201,079 —	45 4 12 ,7	25 20 6 ,2	21 20 ,41
Clocher de St-Thomas	147 31 43 ,8	153,2707	82,287 —	129,308 —	45 4 8 ,2	25 20 10 ,7	21 20 ,71
Clocher de S.-Roch	152 30 37 ,8	265,6457	122,618 —	235,653 —	45 4 14 ,9	25 20 7 ,1	21 20 ,47
Coupole de la Consolata	157 29 35 ,2	527,9365	202,091 —	487,785 —	45 4 30 ,8	25 20 0 ,0	21 20 ,00
Clocher du S. Esprit	169 51 46 ,3	282,4324	49,709 —	278,023 —	45 4 17 ,6	25 20 13 ,6	21 20 ,91
Clocher de la Basilique	172 27 19 ,0	387,3597	50,860 —	384,006 —	45 4 24 ,3	25 20 13 ,5	21 20 ,90
Clocher de la Sainte-Trinité. . . .	173 33 24 ,1	211,6143	23,747 —	210,278 —	45 4 13 ,3	25 20 15 ,9	21 21 06
Coupole de S-Laurent	187 16 36 ,6	224,5552	28,443 E	222,747 —	45 4 14 ,1	25 20 20 ,5	21 21 ,37
Clocher de S.-Jean .	189 1 12 ,8	315,8001	49,512 —	311,895 —	45 4 19 ,7	25 20 22 ,4	21 21 ,49
Coupole du S.-Suaire	194 10 35 ,5	293,5250	71,887 —	284,586 —	45 4 18 ,0	25 20 24 ,4	21 21 ,63
Télégraphe du Château	201 19 31 ,1	166,3992	60,513 —	155,006 —	45 4 9 ,8	25 20 23 ,4	21 21 ,56
Autre Télégraphe . .	201 40 59 ,1	176,1430	65,080 —	163,680 —	45 4 10 ,3	25 20 23 ,8	21 21 ,59
Guérite de la Tour du Château	208 0 3 ,7	159,3198	74,798 —	140,669 —	45 4 8 ,9	25 20 24 ,7	21 21 ,65
Observatoire de Beccaria	228 55 27 ,6	150,3954	113,374 —	98,818 —	45 4 6 ,2	25 20 28 ,1	21 21 ,87
Clocher de S.-Philippe Neri	253 47 47 ,6	37,8884	36,383 —	10,573 —	45 4 0 ,7	25 20 21 ,2	21 21 ,41
Coupole de la Supergue	258 0 42 ,5	3450, 849	3375,588 —	716,776 —	45 4 45 ,4	25 25 18 ,9	21 41 ,26
Tour Faverge ou Graneri	259 56 28 ,8	157,5418	155,120 —	27,516 —	45 4 1 ,7	25 20 31 ,8	21 22 ,13
Clocher de S.-François de-Paule	269 43 47 ,1	200,0733	200,071 —	0,944 —	45 4 0 ,1	25 20 35 ,8	21 22 ,39
Clocher de S.te-Croix	309 8 30 ,6	240,6665	186,658 —	151,919 S	45 3 50 ,4	25 20 34 ,6	21 22 ,31
Coupole du Monte .	311 51 13 ,7	733,6912	546,490 —	489,542 —	45 3 29 ,1	25 21 6 ,7	21 24 ,45
Clocher de S.-Michel	314 12 18 ,7	355,0765	254,536 —	247,570 —	45 3 44 ,4	25 20 40 ,7	21 22 ,71
Cloch. du Crocefisso	325 33 51 ,5	210,2400	118,887 —	173,398 —	45 3 49 ,0	25 20 28 ,6	21 21 ,91
Coupole de l'Hôpital	327 59 40 ,7	295,2647	156,490 —	250,381 —	45 3 44 ,2	25 20 32 ,0	21 22 ,13
Terme A de la Base	357 39 25 ,2	691,0265	28,275 —	691,048 —	45 3 16 ,4	25 20 20 ,5	21 21 ,37

Le Polygone du P. BECÇARIA mesuré presque au centre du Piémont, est par sa situation très-propre à servir de Base aux opérations qu'on pourrait entreprendre dans la suite pour lever la carte de ce pays. Aussi M.r l'abbé LIRELLI s'en est-il servi en 1790 (*). Sous ce point de vue des récherches ultérieures sur cette mesure ne seront pas hors de propos. Comme tout le Polygone est lié à la Supergue, où nous avons observés des Azimuths, et dont nous avons déterminés la latitude et la longitude d'après celles que nous avons observées à Turin, nous nous sommes servis de ces nouvelles Données pour refaire tout le calcul de ce Polygone.

Nous sommes partis de l'Azimuth de Supergue avec le clocher de S.t-Jean 83° 7′ 10″, 7 (page 186) et de la latitude que nous avons établie = 45° 4′ 45″, 4 la longitude 25° 25′ 18″, 9. De là nous avons calculé les distances de Supergue à Rivoli, Balangé, Mazzé, Andrà, et Sanfré, et les longitudes et latitudes de ces points dans l'hypothèse du sphéroïde terrestre aplâti $\frac{1}{310}$. Pour Saluzzo et Mondovi nous prîmes notre point de départ de Sanfré, tel que nous l'avions déterminé par Supergue. En voici les résultats :

(*) Mémoire historique de l'Académie Royale des Sciences de Turin pour les années 1790 et 1791, pag. 40

Formation des Azimuths.

Fig. 5.

Angle *o* S I ou Azimuth du clocher de St.-Jean compté de la Supergue du Sud vers l'Ouest	83°	7′	10″, 7
Angle R S I entre Rivoli et le clocher de St.-Jean *(Gradus Taur. pag.* 105*)*.	3	34	42
Angle *o* S R ou Azimuth de Rivoli compté du Sud vers l'Ouest . . .	86°	41′	52″, 7
Angle R S F entre Rivoli et Sanfré *(Gradus Taur. p.* 63 *)*	91	32	12
Angle *o* S F ou Azimuth de Sanfré compté du Sud vers l'Est . . .	4	50	19, 3
Complément à 360° ou cet Azimuth compté du Sud vers l'Ouest. . . .	355°	9′	40″, 7
Azimuth de Rivoli	86°	41′	52″, 7
Angle R S B entre Rivoli et Balangé *(Gradus Taur. pag.* 65 *)* . . .	54	27	31
Angle *o* S B ou Azimuth de Balangé compté du Sud vers l'Ouest	141°	9′	23″, 7
Angle B S M entre Balangé et Mazzé *(Gradus Taur. p.* 65 *)*	67	6	49
Angle *o* S M ou Azimuth de Mazzé compté du Sud vers l'Ouest . . .	208°	16′	12″, 7

Azimuth de Rivoli	86° 41′ 52″, 7
Angle A S R entre Rivoli et Andrà (*Gradus Taur. p.* 65)	102 46 17
Angle *o* S A ou Azimuth d'Andrà compté du Sud vers l'Ouest . . .	189° 28′ 9″, 7
Azimuth de Sanfré compté du Sud vers l'Est	4° 50′ 19″, 3
Convergence des méridiens . .	— 1 38, 3
Azimuth de la Supergue compté de Sanfré du Nord vers l'Ouest . .	4° 49′ 41″, 0
Angle R F S entre la Supergue et Rivoli (*Gradus Taur. p.* 63) .	28 33 58
Angle R F L entre Saluzzo et Rivoli (*Gradus Taur. p.* 63)	83 49 46
Angle *n* F L ou Azimuth de Saluzzo compté du Nord vers l'Ouest . .	117 12 25, 0
Complément à 180° ou cet Azimuth *s* F L compté du Sud vers l'Ouest .	62 47 35, 0
Angle L F V entre Saluzzo et Mondovi (*Gradus Taur. pag.* 63)	65 17 43
Angle *s* F V ou Azimuth de Mondovi compté du Sud vers l'Est . . .	2 30 8, 0
Complément à 360° ou Azimuth de Mondovi du Sud vers l'Ouest . .	357° 29′ 52″, 0

Table de la direction du Méridien de toutes les stations de la mesure géodésique du degré du Piémont avec leurs distances et leurs longitudes et latitudes.

NOMS des STATIONS.	ANGLES DE DIRECTION comptés du Sud vers l'Ouest.	DISTANCES.	LATITUDE.	LONGITUDE.	DIFFÉRENCE DES MÉRIDIENS. à l'Est de Paris.
S. Supergue	0° 0′ 0″,0	0 T	45° 4′ 45″, 4	25° 25′ 18″, 9	21′ 41″,26
R. Rivoli	86 41 52 ,7	SR = 10380, 14	45 4 6 , 5	25 9 55 , 3	20 39 ,69
B. Balangé	141 9 23 , 7	SB = 14727, 28	45 16 48 , 8	25 11 31 , 3	20 46 ,09
A. Andrà	189 28 9 , 7	SA = 25835, 56	45 31 34 , 5	25 31 40 , 8	22 6 72
M. Mazzé	208 16 12 , 7	SM = 14547, 92	45 18 14 , 4	25 35 34 , 2	22 22 ,28
F. Sanfré	355 9 40 , 7	SF = 18780, 14	44 45 3 , 3	25 27 39 , 3	21 50 ,62
F. Sanfré	0 0 0 , 0	0	44 45 3 , 3	25 27 39 , 3	21 50 , 62
L. Saluzzo	62 47 35 , 0	FL = 14496, 56	44 38 4 , 6	25 8 38 , 7	20 34 , 58
U. Mondovi	357 29 52 , 0	FU = 20651, 02	44 23 20 , 4	25 28 58 , 7	21 55 , 91

Ayant déterminé ainsi la latitude de Mondovi et d'Andrà, on sera curieux de voir comment elles s'accordent avec celles que le P. BECCARIA y a observé avec son secteur. Il faudra pour cela refaire le calcul de toutes ces observations par la même raison et de la même manière, comme nous l'avions entrepris pour celles faites à Turin.

OBSERVATIONS DES ÉTOILES FAITES A ANDRA.

1762 *α du Cygne au Sud.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST. (*)			LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.		
1762	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.	1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
25 Juillet	1° 5′ 30″, 17	45° 31′ 57″, 93	3 Août	1° 4′ 13″, 48	45° 30′ 44″, 09
27	1 5 30 , 17	58 , 33	4	1 4 13 , 02	43 , 99
28	1 5 29 , 25	57 , 76	5	1 4 12 , 11	43 . 43
1 Août	1 5 29 , 25	59 , 15	6	1 4 11 , 65	43 , 32
10	1 5 26 , 51	59 , 53	9	1 4 10 , 74	43 , 41

Milieu, le limbe à l'Ouest . . . . 45° 31′ 58″, 54

Milieu, le limbe à l'Est . . . . 45° 30′ 43″, 65
Milieu, le limbe à l'Ouest . . . . . . 45 31 58 , 54

Différence . . . . . 1 14 , 89
Moitié, erreur de collimation . . . . ± 37 , 45

Latitude vraie . . . . . . 45° 31′ 21″, 10

(*) Gradus Taurinensis, art. I, pag. 145.

1762 δ du Cygne au Sud.

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.			LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.		
1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.	1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
25 Juillet	0° 58′ 15″, 14	45° 31′ 58″, 89	4 Août	0° 56′ 56″, 17	45° 30′ 43″, 27
27	0 58 15 , 14	59 , 26	5	0 56 56 , 17	43 , 61
28	0 58 13 , 77	58 , 23	6	0 56 55 71	43 , 49
31	0 58 13 , 77	58 , 52	9	0 56 53 , 88	43 , 64
1 Août	0 58 12 , 40	57 , 48	11	0 56 52 , 97	43 , 41

Milieu . . . . 45° 31′ 58″, 48

Milieu, le limbe à l'Est	45° 30′ 43″, 48
Milieu, le limbe à l'Ouest	45 31 58 , 48
Différence	1 15 , 00
Moitié, erreur de Collimation : . .	± 37 , 50
Latitude vraie	45° 31′ 20″, 98

1762 β *du Cocher au Sud.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1762	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
30 Juillet.	0° 38′ 14″, 00	45° 32′ 1″, 99
1 Août.	0 38 13, 54	1, 42

Milieu . . . . 45° 32′ 1″, 70

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1762	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
6 Août	0° 37′ 0″, 49	45° 30′ 48″, 43
9	0 37 0, 49	48, 23
16	0 37 0, 49	47, 84

Milieu, le limbe à l'Est	45° 30′ 48″, 17
Milieu, le limbe à l'Ouest	45 32 1, 70
Différence	1 13, 53
Moitié, erreur de collimation	± 36, 77
Latitude vraie	45 31 24, 94

Rassemblant tous ces résultats, nous aurons pour la vraie latitude d'Andrà:

		NOMBRE D'OBSERVATIONS.
Par α du Cygne . . .	45° 31′ 21″, 10	5
Par δ du Cygne . . .	20, 98	5
Par β du Cocher . . .	24, 94	2
Milieu, Résultat définitif de la latitude d'Andrà	45° 31′ 22″,34	12

OBSERVATIONS DES ÉTOILES FAITES A MONDOVI.

1762 *α du Cygne au Nord.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
2 Septembre.	0° 4′ 8″, 86	44° 22′ 29″, 75
3	0 4 8 , 86	30 , 00
5	0 4 9 , 77	29 , 27
6	0 4 9 , 77	29 , 53
8	0 4 9 , 77	30 , 02
15	0 4 10 , 68	31 , 00

Milieu . . . . 44° 22′ 29″, 93

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
9 Septembre	0° 1′ 56″, 44	44° 24′ 43″, 92
13	0 1 56 , 89	44 , 40
19	0 1 57 , 81	44 , 71
20	0 1 57 , 81	44 , 92

Milieu, le limbe à l'Ouest . . .	44° 24′ 44″, 49
Milieu, le limbe à l'Est	44 22 29 , 93
Différence	2 14 , 56
Moitié, erreur de Collimation . .	∓ 1 7 , 28
Latitude vraie	44° 23′ 37″, 21

1762 *δ du Cygne au Nord.*

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
2 Septembre	0° 11′ 25″, 39	44° 22′ 27″, 99
6	0 11 26 , 30	28 , 75
8	0 11 26 , 30	28 , 00
15	0 11 28 , 13	28 , 85
18	0 11 28 , 59	28 , 89
	Milieu	44° 22′ 28″, 50

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1762.	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
9 Septembre	0° 9′ 12″, 06	44° 24′ 43″, 82
13	0 9 12 , 97	43 , 58
19	0 9 13 , 88	43 , 75
20	0 9 14 , 80	42 , 81

Milieu, le limbe à l'Ouest	44° 24′ 43″, 49
Milieu, le limbe à l'Est	44 22 28 , 50
Différence	2 14 , 99
Moitié, erreur de Collimation . . .	± 1 7 , 49
Latitude vraie	44° 23′ 35″, 99

1762 β du Cocher au Nord.

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'EST.

1762	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
2 Septembre.	0° 31′ 13″, 03	44° 22′ 32″, 59
5	0 31 13 , 03	32 , 60
6	0 31 13 , 03	32 , 59
7	0 31 13 , 03	32 , 59
14	0 31 13 , 03	32 , 55
17	0 31 13 , 03	32 , 57
18	0 31 13 , 03	32 , 59

Milieu . . . . 44° 22′ 32″, 58

LE LIMBE DU SECTEUR TOURNÉ A L'OUEST.

1762	DISTANCES au Zénith observées.	LATITUDES calculées.
9 Septembre.	0° 28′ 56″, 96	44° 24′ 48″, 72
11	0 28 56 , 96	48 , 63
13	0 28 56 , 05	49 , 54
19	0 28 56 , 96	48 , 75

Milieu, le limbe à l'Ouest	44° 24′ 48″, 91
Milieu, le limbe à l'Est	44 22 32 , 58
Différence	2 16 , 33
Moitié, erreur de collimation	± 1 8 , 17
Latitude vraie	44 23 40 , 75

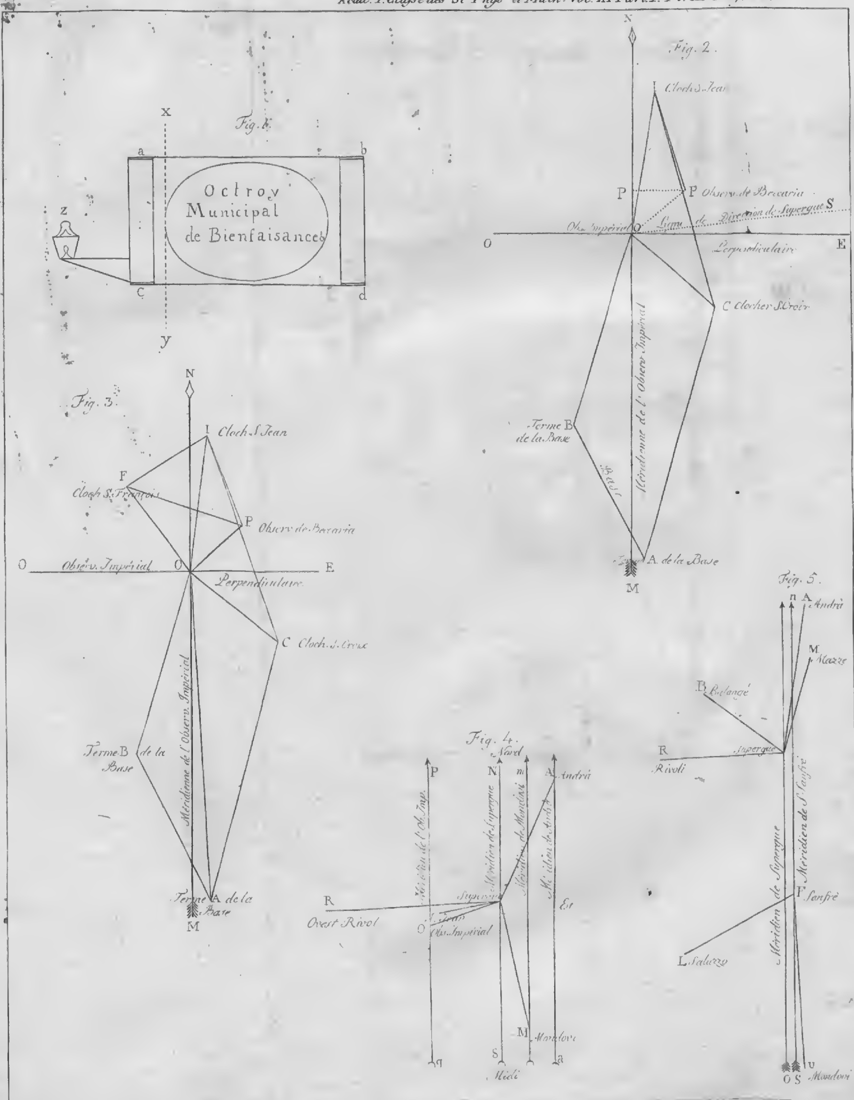
Ces résultats réunis donnent pour la vraie latitude de Mondovì :

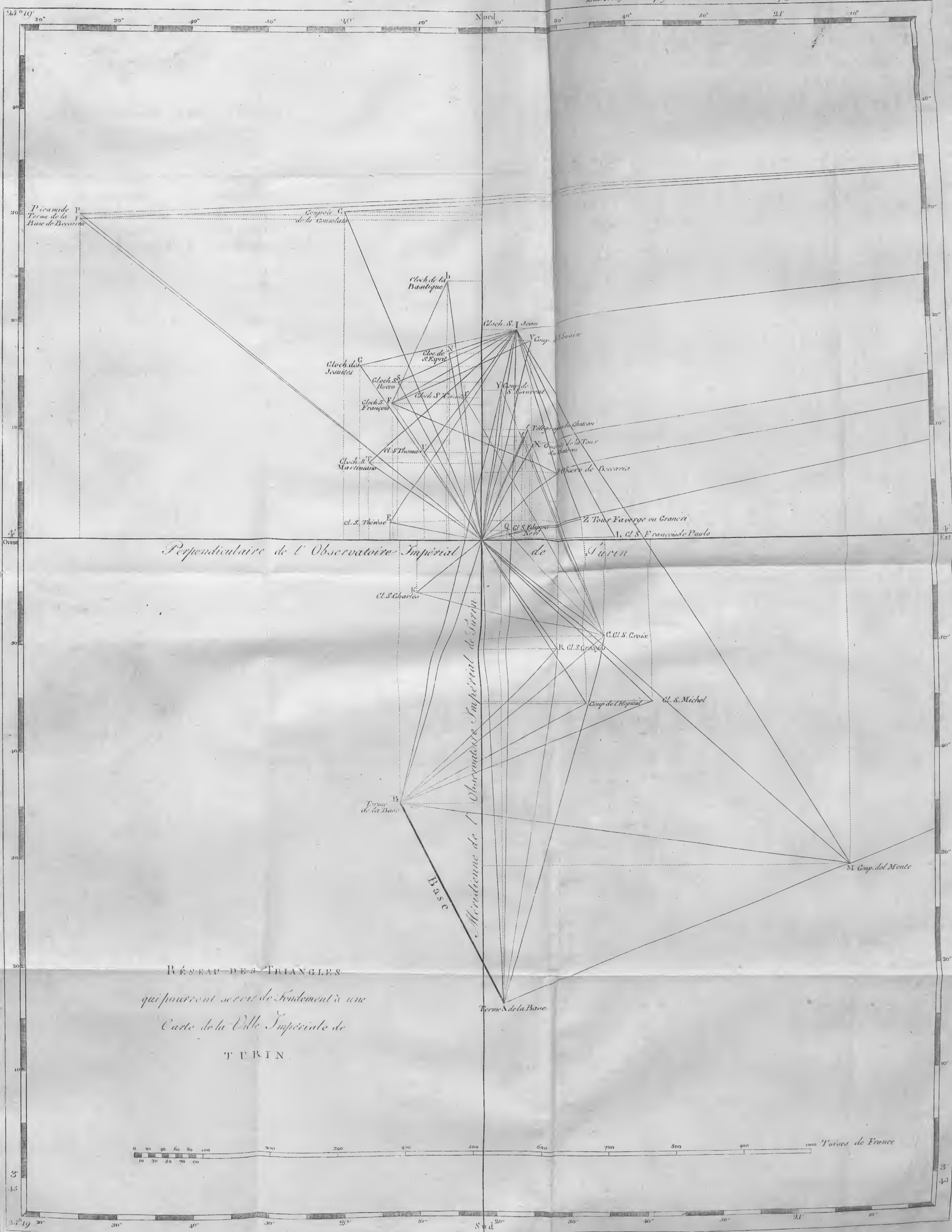
	NOMBRE D'OBSERVATIONS.
Par α du Cygne . . . 44° 23′ 37″, 21	5
Par δ du Cygne . . . 35 , 99	4
Par β du Cocher . . . 40 , 75	5
Milieu, latitude définitive de Mondovì 44° 23′ 37″,98	14

Comparons maintenant les latitudes observées avec celles données par les Triangles et nous aurons.

	à ANDRA	à MONDOVI
Latitude d'après les observ. astronom. du P. BECCARIA avec son secteur . . .	45° 31′ 22″, 34	44° 23′ 37″, 98
Latitude d'après les Triangles de BECCARIA et nos observ. astronom. à Turin.	45 31 34, 5	44 23 20, 4
Différence	+ 12″, 16	− 17″, 58
Différence sur l'arc total	= 29″, 74	

Que prouve cette différence énorme d'une demie minute sur toute l'amplitude de l'arc céleste? . . . Pour décider cette grande question, il faudrait répéter la mesure du P. BECCARIA, mesure qui réunirait plusieurs intérêts en même tems. Elle mettrait en évidence et constaterait les attractions du Mont-Rosa, et de cette chaîne de montagnes; elle fournirait la Base et le canevas d'une carte très-exacte du Gouvernement général des départemens au-delà des Alpes, dont on pourrait se servir tant pour les reconnaissances militaires, hydrographiques et odométriques, que pour le cadastre et la statistique de ce Gouvernement.


Fig. 1.
x
a
b
Octroy
Municipal
de Bienfaisance
z
c
d
y
Fig. 2.
N
I Cloch S. Jean
P
P Observ. de Beccaria
Obs. Impérial O
Ligne de Direction de Superga S
O
E
Perpendiculaire
C Clocher S. Croix
Méridienne de l'Observ. Impérial
Terme B de la Base
Base
A. de la Base
M
Fig. 3.
N
I Cloch. S. Jean
F
Cloch. S. François
P Observ. de Beccaria
O Observ. Impérial O
E
Perpendiculaire
C Cloch. S. Croix
Méridienne de l'Observ. Impérial
Terme B de la Base
Terme A de la Base
M
Fig. 4.
Nord
P
N
m
A Andrà
R
Ouest Rivol
Superga
O
Obs. Impérial
Est
M Mondovì
S
Midi
Fig. 5.
n
A Andrà
M Mazze
B Balangé
R Rivoli
Superga
Méridien de Superga
Méridien de S. Sanfré
F Sanfré
L Saluzzo
O S
Mondovì



Nord
Sud
Ouest
Est
Piramide P
Terme de la Base de Beccaria
Coupole C de la Consolata
Cloch de la Basilique b
Cloch. S. I Jean
V Coup. S. Suaire
Cloc. de S. Esprit N
Cloch. des Jesuites G
Cloch. S. S Rocco
Y Coup. de S. Laurent
Cloch. S. F François
t Télégraphe du Chateau
X Guerite de la Tour du Chateau
Cl. S. Thomas U
Cloch. S. T Martiniano
Observ. de Beccaria
Cl. S. Thérèse E
Z Tour Faverge ou Graneri
Q Cl. S. Filippo Neri
L Cl. S. François de Paule
Perpendiculaire de l' Observatoire Impérial de Turin
Cl. S. Charles K
C Cl. S. Croix
R Cl. S. Crosses
Coup. de l'Hôpital
Cl. S. Michel
B Terme de la Base
M Coup. del Monte
Base
Méridienne de l' Observatoire Impérial de Turin
Terme A de la Base
Réseau des Triangles qui pourront servir de Fondement à une Carte de la Ville Impériale de Turin.
Toises de France

FAUTES A CORRIGER.

Page 87	*ligne* 19.	Z d'Hercule	*lisez*	, d'Hercule
95.	9.	Othier	. . . .	Outhier
103.	1.	57′,37	. . . .	57″,37
111.	*dernière.*	autour	. . . .	au tour
112.	20.	conjugée	. . .	conjuguée
113.	1.	conjugée	. . .	conjuguée
118.	14.	Bertoud	. . . .	Berthoud
161.	2.	le plaçait	. . .	les plaçait
168.	6 *d'enbas*	+ Perches N.° I	.	+ Perche N.° I

RECHERCHES

SUR LA PRÉPARATION DE L'INDIGO.

PAR M.r VICTOR MICHELOTTI.

Lues dans la Séance du 13 Novembre 1811.

(*Histoire.*) LES caractères, et la composition de l'indigo, telle qu'elle existe préparée dans le commerce, ont déjà fait l'objet des recherches chimiques de BERGMAN, BERTHOLLET etc. M.r CHEVREUL a ajouté à l'analyse exacte de l'indigo, les analyses de l'*Isatis tinctoria*, de l'*Indigofera* et du pastel. Mon but n'étant pas de chercher les moyens d'extraire avantageusement cette fécule, il ne sera pas question des excellens traités de M.r PUYMAURIN, de Lasterye, et d'autres Auteurs qui ont rendu cet important service à ce nouvel art.

Pour compléter l'histoire chimique de cette substance, il faut connaître les combinaisons qui se forment pendant sa préparation. Comme l'*Indigofera* n'est pas

indigène chez-nous, je n'ai étendu mes recherches que sur l'*Isatis tinctoria*.

Les procédés pour l'extraction de l'indigo sont assez multipliés, on pourrait cependant les réduire aux suivans: le plus connu est celui de la macération et fermentation des feuilles indigofères dans l'eau, le second est celui de l'infusion dans l'eau chaude, le troisième celui dans lequel on parvient par une succession de plusieurs opérations, ou seulement à séparer la matière colorante, ou à la séparer et à l'appliquer dans la même opération.

Au trosième se réduirait le procédé que j'ai déjà eu l'honneur de communiquer à la Classe. La pratique qu'on tient pour teindre avec le pastel, présente précisément le cas dans lequel on fait deux opérations, c'est-à-dire, la séparation et la solution de l'indigo du pastel, et sa précipitation sur la matière à teindre.

(État des connaissances.) Ces différentes méthodes donnent une fécule colorante assez semblable, ce qui fait voir qu'on peut obtenir la fécule indigo par différens jeux des affinités chimiques. Cependant ils n'ont pas encore excité l'attention des chimistes, et ce qu'on connaît de plus précis à cet égard, est dû à M.r Berthollet. (*)

Cet illustre Auteur regarde ce qui se passe dans la méthode par fermentation, comme satisfaisant à trois différens objets.

(*) Elémens de l'art de la teinture, seconde édition, tom. II, pag. 41 etc.

Il croit que « par la fermentation dans laquelle l'ac-
» ction de l'air atmosphérique n'intervient pas, puis-
» qu'il se dégage un gaz inflammable, il en résulte
» probablement quelque changement dans la compo-
» sition même des parties colorantes, mais surtout la
» séparation, ou la destruction d'une substance jaunâ-
» tre qui donnait à l'indigo une teinte verdâtre, et
» qui le rendait plus susceptible d'éprouver l'action chi-
» mique des autres substances. »

On sent que cela supposerait une couleur primitive bleue dans l'indigo. Cependant M.r Berthollet n'était pas de cet avis, puisqu'il dit « Jusque là les parties co-
» lorantes ont conservé leur liquidité: dans la seconde
» opération on fait intervenir l'action de l'air qui en
» se combinant avec les parties colorantes, le prive
» de leur solubilité, et leur donne la couleur bleue;
» le battage en même temps sert à dissiper l'acide car-
» bonique qui s'est formé dans la première opération,
» et dont l'action est un obstacle à la combinaison de
» l'oxigène: on favorise la séparation de cet acide par
» l'addition de la chaux etc. etc.

Ce qui se passe dans la troisième partie du procédé lui paraît avoir pour objet « le dépôt de la partie co-
» lorante, qui est devenue insoluble par la combinai-
» son de l'oxigène, sa séparation des substances étran-
» gères, et sa dessication qui lui donne plus ou moins
» de dureté, et qui en fait varier les apparences. »

Ce n'est cependant qu'avec beaucoup de circonspec-

tion que ce profond connaisseur des mystères chimiques nous présente son opinion ; on conçoit aisément que toutes les fois qu'on extrait cette fécule ou par l'infusion dans l'eau chaude, ou par d'autres procédés que celui de la fermentation n'y ayant alors aucune production d'acide carbonique, quoiqu'on obtienne toujours une fécule semblable, il doit s'en suivre que dans ce dernier cas le jeu des affinités chimiques doit être assez différent, et que dans le cas de fermentation les vrais agens et le mode sont probablement différens de ceux que l'Auteur avait d'abord pris en considération.

(*État et couleur primitive de l'indigo.*) Toutes les fois qu'on obtient l'indigo ou par une simple infusion à chaud, ou par une fermentation modérée, ou moyennant une eau acidulée on n'observe point d'altération organique dans les feuilles. Cela me paraît indiquer que l'indigo ne provient pas des matériaux de la feuille altérée, mais plutôt que cette fécule toute existante qu'elle est dans la plante, passe en dissolution chimique dans l'eau avec les circonstances que nous allons énoncer.

On a communément supposé que l'indigo est vert dans les feuilles, mais que c'était la matière jaune, avec laquelle il était combiné, qui produisait cette couleur; ce qui reviendrait à la même chose qu'à le supposer primitivement bleu. Cette première supposition n'est plus soutenable. Comme dans la dissolution de l'indigo dans la cuve il passe au vert, et que c'est alors qu'il

est un peu soluble dans les alcalis, et que d'ailleurs, lorsque la fermentation des feuilles a été assez prolongée, elle produit précisément une liqueur verdâtre dans laquelle on reconnaît aussi un peu d'ammoniaque, on a cru avec beaucoup plus de vraisemblance que sa couleur primitive était le vert, et qu'il ne devenait bleu que par le procédé de l'oxidation.

M. Chevreul ayant découvert que l'indigo ordinaire, et le pastel donnaient pendant leur analyse une petite partie d'indigo décoloré etc. Il avait conclu que l'indigo était tout formé dans les végétaux, et qu'il y était a son *minimum* d'oxidation, au moins pour la plus grande partie. etc. (*)

Pour éclaircir cette question il fallait donc connaître décisivement quelle était la couleur primitive de cette substance, lorsqu'elle passe du végétal à sa dissolution, et il m'a paru qu'on y devait aller directement, et non pas en conclure d'après le produit d'une analyse, dont les résultats peuvent être certains quant aux produits obtenus et nullement quant à leur état avant leur séparation.

Je ferai observer que toutes les fois qu'on prépare avec de l'eau simple des infusions à chaud la première eau d'infusion qui est la plus riche en fécule colorante, n'est d'abord que très-légèrement colorée par l'extrac-

---

(*) Ann. de chimie tom. 66.

tif et nullement en vert, ou en bleu, ou en cuivré, que la seconde et la troisième eau qui contiennent très-peu ou point d'indigo, sont cependant de plus en plus colorées par l'extractif jaunâtre. Finalement beaucoup de plantes que j'ai fait infuser dans de l'eau chaude et qui m'ont présenté des infusions semblables à celles de l' *Isatis*, ne m'ont cependant pas donné de l'indigo, mais bien des fécules jaunes, vertes, bleues, suivant la nature des plantes. Ce qui mériterait d'être examiné. Ce n'est qu'à la surface des infusions indigofères, c'est-à-dire au contact de l'air qu'on observe les pellicules cuivreuses. L'infusion faite à une certaine température précipite par elle-même de l'indigo bleu même très-beau, mais cette infusion ne se colore qu'au moment qu'il y a un commencement de précipitation, et aussitôt qu'elle a abandonné l'indigo coloré, elle reprend sa teinte ordinaire, quoique encore très-riche en matière colorante.

On doit dire autant de l'eau dans laquelle on fait fermenter les feuilles du pastel. Cette eau quoique déjà assez riche en matière colorante n'a pas la teinte verte toutes les fois qn'on évite le contact de l'air et une fermentation trop prolongée. On voit donc que l'indigo dans toutes ces préparations ne colorait pas ces dissolutions; mais avant d'examiner l'état dans lequel il s'y trouvait, il m'a fallu connaître la nature de ces dissolutions.

Quoique dans la préparation de l'indigo l'excipient

ordinaire soit l'eau, cependant il est bien connu que l'indigo vert et le bleu, n'y sont point solubles, cela indiquerait donc ou que l'indigo à son état primitif est soluble dans l'eau, ou qu'il l'est par l'intermède de quelque dissolvant.

(Action de l'eau pure ou alcalisée.) J'ai mis digérer des feuilles de pastel dans de l'eau de chaux à la même température, et pendant le même temps que j'en faisais fermenter d'autres dans de l'eau simple. Les feuilles du premier se sont conservées dans le meilleur état, et l'eau ne contenait pas la plus petite parcelle d'indigo. Les mêmes feuilles traitées ensuite avec de l'eau presque bouillante donnèrent de l'indigo à l'ordinaire.

L'inefficacité de l'eau de chaux me détermina à essayer l'eau alcalisée par la potasse caustique. Cette eau d'abord ne toucha pas à l'indigo, mais l'ayant de nouveau examinée après un certain temps j'y ai reconnu beaucoup de matière verte, un peu d'albumine et de la cire, avec un peu d'indigo. Il peut donc bien se faire que cette petite portion d'indigo qui passe en dissolution dans cette eau soit plutôt dûe à l'action intermédiaire de la matière verte et de la matière albumineuse, qu'à l'action directe de l'alcali sur l'indigo même.

J'ai examiné à différentes époques l'eau simple dans laquelle j'avais mis fermenter des feuilles de pastel, le résultat fut que l'indigo ne passa pas en dissolution dans cette eau jusqu'au moment que la fermentation a commencé à donner des indices.

Les résultats de ces expériences serait donc la non solubilité de l'indigo dans son état primitif dans l'eau de chaux et dans l'eau simple, comme peut être aussi dans l'eau alcalisée par la potasse, et cela à la température qui est capable d'entretenir la fermentation.

Avant cependant d'examiner ce qui déterminait sa solubilité pendant la fermentation, ou lors de l'infusion faite à une haute température, il fallait constater si quelque obstacle mécanique empêchait la libre solution de l'indigo dans l'eau pure ou alcalisée par la chaux. Cet obstacle pouvait être la cire qui paraît former un vernis sur les feuilles et qui pouvait bien être emportée par la fermentation comme par l'eau bouillante.

Pour parvenir à ce but les eaux acidulées par les acides sulfurique, muriatique et acétique m'ont excellemment servi. Ces eaux mises infuser à froid sur les feuilles du pastel n'ont pas touché à la cire, pendant qu'elles ont dissous l'indigo.

(Action des eaux acidulées.) Par ce genre de préparation je me suis servi de gros matras de verre à cou étroit et long, dans lesquels je plaçais d'abord les feuilles et que je remplissais ensuite des eaux à examiner; un bouchon interceptait tout contact avec l'air.

Les feuilles ainsi mises macérer perdent leur vert et passent au jaune ressemblant assez à celles sur lesquelles on a fait infuser de l'eau bouillante. Ce changement est plus ou moins prompt suivant la force de l'acide. On n'emporte pas avec la première infusion acide tout l'in-

digo des feuilles, mais il en reste encore une petite partie, tout comme il arrive aux infusions faites avec l'eau bouillante.

Assez souvent les eaux acidulées m'ont donné dans quelques minutes de l'indigo. Ces infusions faites pendant un tems convenable ont une couleur ambrée et elles conservent l'odeur de la plante. L'eau de chaux mise à suffisance verdit ces infusions et en précipite de l'indigo. Mais dans le cas où l'eau est acidulée par l'acide sulfurique, l'indigo précipité est mêlé avec un peu de sulfate, ce qui lui donne une teinte claire, etc. Les meilleurs précipitans sont les alcalis ou leurs sous-carbonates. L'indigo obtenu est très-beau, mais il a très-peu de violet. L'acide acétique m'a toujours donné un indigo un peu altéré. L'acide muriatique m'a paru le plus propre pour extraire la fécule colorante et la laisser précipiter dans sa plus belle couleur.

Ces infusions acides très-riches en matière colorante, n'étant pas le produit d'une fermentation, ou d'une haute température, et leur couleur ambrée ne provenant pas de l'indigo, elles étaient très-propres pour connaître la fécule primitive.

Pour cela j'ai rempli à demi un matras à long col d'une solution de carbonate de soude, et j'ai versé sur cette solution l'infusion des feuilles préparée avec l'acide muriatique, que j'avais toujours tenue bouchée. La vive effervescence étant passée, j'ai fini de remplir le col du matras avec de l'huile.

Le mélange de deux liqueurs prenait d'abord une teinte verte qui se conservait. Les premiers flocons étaient aussi légèrement colorés, mais l'indigo qui se déposait par la suite, était parfaitement décoloré. On comprend que la teinte des liqueurs mélangées, ainsi que du premier précipité, pouvait bien être dû à l'impossibilité dans laquelle on est dans de semblables procédés d'éviter tout contact avec l'air. Avec les circonstances convenables l'eau de chaux et les alcalis caustiques produisent un effet semblable.

Cette expérience démontrait que tout l'indigo du végétal passe en dissolution à l'état de fécule décolorée; telle méthode offre un moyen facile de préparer cette substance qu'on peut encore regarder comme nouvelle, et sur la nature de laquelle je reviendrais, lorsqu'il sera question de la coloration de l' indigo.

(*Examen de la liqueur fermentée.*) Lorsqu'on fait fermenter une suffisante quantité de feuilles de pastel pendant un certain tems, c'est-à-dire avant que commence la fermentation qu'on pourrait appeler putride, on aperçoit que la liqueur est au goût un peu piquante, et même acide, les réactifs tels que la teinture de Tournesol décèlent l' acide carbonique.

Cependant j'ai cru devoir m'en assurer: j'ai fait bouillir de cette liqueur dans un matras aboutissant à une bouteille de Wolf pleine d'eau de chaux, j'en ai obtenu un abondant précipité de carbonate de chaux. Après cela la liqueur restante n'était nullement acide. Je l'ai de nouveau distillée, et ce qui est passé à la distilla-

tion, n'était que de l'eau pure. J'aurais facilement obtenu de l'acide acétique, si j'avais poursuivi la distillation, lorsque la liqueur avait été concentrée ; sur tout avec l'addition d'un peu d'acide sulfurique ; mais j'aurais regardé cela comme un produit et non pas comme un des matériaux immédiats de la liqueur.

Lorsque ce liquide avait perdu par sa première ébullition son acide carbonique, il déposait un peu de fécule colorante, pendant qu'il en retenait encore la plus grande partie, comme je m'en suis convaincu en précipitant une partie par l'eau de chaux. La matière colorante qui abandonnait la liqueur pendant l'ébullition pouvait donc provenir également de l'extrication de l'acide carbonique ou de la diminution du véhicule liquide ou de ces deux causes réunies.

La matière colorante qu'on obtient ainsi après avoir fait bouillir la liqueur ne donnait qu'un indigo de mauvaise couleur. Ces expériences paraissent indiquer que dans le liquide résultant de la fermentation les dissolvants de l'indigo ne sont ni l'acide carbonique ni l'acide acétique. Ce liquide, s'il n'a pas éprouvé un trop fort degré de fermentation, ni aucun battage, après l'avoir depouillé de son acide carbonique par un peu d'ébullition, ressemble entièrement par sa couleur, et par la nature des différens précipités qu'on obtient, à l'infusion des feuilles faite avec de l'eau bouillante, dans laquelle on n'aperçoit non plus aucun acide libre.

(*Propriétés communes aux deux liquides.*) En versant dans les deux liquides obtenus soit par fermenta-

tion, soit par infusion du nitrate ou de l'acétate de plomb, on a sur-le-champ un abondant précipité floconeux qui se dépose assez lentement et qui est redissoluble pour la plus grande partie, dans l'acide acétique, et dans le nitrique bien délayé; d'autres faits confirmaient aussi la présence de l'acide malique dans ces liquides, mais il restait à connaître quelle en était l'action.

(*Nature du dissolvant de l'indigo etc.*) Pour cela j'avais préparé avec des feuilles bien lavées, et égouttées une infusion dans de l'eau distillée que j'avais ensuite partagé en deux parties. La première était destinée à voir si on pouvait opérer un changement de base, lorsque l'indigo est combiné, et la seconde partie était réservée à constater la nature de ce dissolvant, s'il y en avait.

J'ai déjà dit que l'acide acétique m'avait alteré la couleur de l'indigo, que j'avais essayé d'extraire par son moyen; c'est pourquoi j'ai préféré dans ce cas une dissolution de muriate de plomb. La dissolution de ce sel a produit dans l'infusion un précipité abondant qui s'est déposé lentement. J'ai décanté le liquide un peu coloré en rouge, du précipité auquel j'ai reconnu tous les caractères du malâte de plomb.

Le liquide décanté et filtré pouvait être du muriate d'indigo, je l'ai essayé successivement avec du carbonate de soude, de la potasse caustique, et de l'eau de chaux. L'eau de chaux, comme les alcalis, verdit immédiatement ce liquide, mais la potasse caustique produit presque à l'instant une belle couleur verte qui devient de plus en plus foncée et finit par déposer un bel indigo bleu.

Le carbonate de soude qui précipite les infusions acides n'a pas eu d'action sur ce liquide qu'on peut considérer comme une solution muriatique neutre d'indigo. L'addition de l'eau de chaux au carbonate de soude, déterminait dans ce liquide un double précipité consistant, en carbonate de chaux coloré par l'indigo séparé de l'acide muriatique, au moyen de la soude que l'eau de chaux a rendue caustique.

Les faits que je viens d'exposer semblent naturellement prouver que l'acide malique abandonne l'indigo à l'acide muriatique pendant qu'il se précipite avec le plomb de celui-ci. Comme j'avais déjà constaté la solubilité de cette espèce d'indigo dans l'acide muriatique etc., il pouvait arriver que l'acide muriatique dégagé du plomb emportât l'indigo à quelqu'autre excipient que l'acide malique ; c'est pourquoi j'ai opéré sur l'autre portion de la même infusion dans laquelle on ne pouvait supposer aucun sel étranger aux feuilles.

J'en ai donc précipité entièrement tout l'indigo par l'eau de chaux et le liquide décanté s'est réduit complétement par l'acétate de plomb, en acétate de chaux et malâte de plomb. Je dis malâte puisqu'un courant de gaz hidrogène sulfuré en a séparé l'acide malique.

On comprend bien que le précipité obtenu par l'acétate de plomb n'était pas du pur malâte comme le liquide n'était pas de pur acétate de chaux, puisque l'eau enlève aux feuilles d'autres substances, et quelques petites parties d'autres sels qui se mêlent avec les précipités

et les dissolutions, mais qui n'ont rien à faire avec l'indigo ou sa précipitation.

(Conclusion.) Avant de passer à d'autres faits qui auront pour but la fécule de l'indigo décolorée et les phénomènes de sa coloration etc., il me paraît que des observations et des expériences que je viens de rapporter, on peut déduire les conséquences suivantes :

1.° Que l'indigo est tout formé dans le végétal, et n'est pas un produit des opérations de son extraction. 2.° Tel qu'il est contenu dans le végétal il n'est ni vert ni bleu, mais décoloré, et qu'il paraît blanc, lorsqu'il est ramassé et lorsqu'il est desséché. 3.° Il n'est pas soluble par lui-même dans l'eau pure, ou alcalisée par la chaux, mais dans les acides affaiblis. 4.° Cette fécule telle qu'elle est d'abord extraite du végétal, diffère essentiellement de l'indigo ordinaire, qui de tous les acides n'est soluble que dans l'acide sulfurique concentré et cela moyennant quelque décomposition qu'il éprouve et par laquelle il devient ensuite soluble dans les autres acides, au contraire la fécule primitive est très-soluble dans tous ces acides même très-délayés, et n'y devient insoluble qu'après avoir été précipité, et alors elle est de l'indigo ordinaire. 5.° On voit que les procédés de la fermentation et de l'infusion à chaud consistent à dissoudre un malâte d'indigo probablement trisule avec la chaux, qui est ensuite décomposé par les alcalis ou par les procédés qui colorant l'indigo, le rendent également insoluble.

MÉMOIRE

SUR DIVERSES INTÉGRALES DÉFINIES.

PAR GEORGES BIDONE.

Lu dans la Séance du 23 Mai 1812.

LES beaux résultats qu'on ajoute continuellement au calcul des intégrales définies, et l'heureux emploi qu'on en fait pour la solution de plusieurs questions intéressantes, montrent quelle importance on doit attacher à l'avancement de cette nouvelle branche d'analyse. Telle est à la vérité la nature de ce genre de recherches, qu'elles exigent le travail de Géomètres qui, de même qu'EULER qui en a jeté les premiers fondemens, réunissent à l'instant toutes les ressources que l'analyse peut fournir dans son ensemble. C'est ce qui se présente à l'esprit en lisant les beaux Mémoires qu'ont publiés sur cette matière les célèbres MM.rs LAPLACE, LEGENDRE et POISSON.

Mais en admirant la supériorité des moyens que ces grands Géomètres ont employés dans ces recherches, on voit qu'ils tiennent souvent à des considérations et à des procédés trop éloignés, peut-être, de ceux sur lesquels repose l'intégration des fonctions à une seule variable, et auxquels il est naturel de penser que doit en dernier résultat se rapporter la recherche des valeurs des intégrales définies. C'est ce qui fait regarder cette recherche comme une partie isolée du calcul intégral, avec lequel elle ne paraît pas encore être coordonnée d'une manière directe, par la diversité des procédés qu'elle semble demander dans chaque cas particulier. On a cependant lieu de croire qu'il en sera de cette branche d'analyse, comme des autres, qui se simplifient en s'étendant, et prennent en se perfectionnant la place qu'elles doivent naturellement occuper dans les diverses parties de la science.

Ce sont ces réflexions qui m'ont porté à présenter à cet égard quelques vues, qui paraissent également propres à ramener ce genre de recherches aux procédés ordinaires du calcul intégral, et à faciliter l'intelligence de ce qu'on a fait sur cet objet, ainsi qu'à faire voir de nouveaux rapports, souvent assez remarquables.

Ce Mémoire est divisé en trois *articles* : Dans *le premier* je commence par l'intégration des différentielles $\frac{dx.\sin.x}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.x}{x^n}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant <2 dans la première de ces différentielles, et

ne pouvant surpasser l'unité dans la seconde. Le procédé qui m'a paru le plus simple, et qui n'est fondé que sur le développement des fonctions en séries, est celui que MASCHERONI a publié dans son excellent ouvrage intitulé *Adnotationes ad Calculum integralem* EULERI, imprimé à Pavie en 1790; Ouvrage qui donne une haute idée de la sagacité de cet illustre Géomètre, et de ce qu'il aurait encore pu faire pour le progrès de l'analyse, et où il s'est occupé presqu'exclusivement d'un grand nombre d'intégrales définies, sur lesquelles on ne connaissait pas encore dans ce tems-là les recherches d'EULER.

Après avoir exposé ce procédé, j'examine les modifications que prennent les intégrales, lorsque ces différentielles sont $\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.rx}{x^n}$: Il résulte du calcul direct, que l'intégrale $\int\frac{dx.\cos.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ n'est point indépendante de r, ainsi qu'il le paraît au premier abord. Par cette propriété singulière on a entre ces limites ce théorème remarquable

$$\int\frac{dx\,(\cos.r'x-\cos.rx)}{x}=\log.r-\log.r';$$

Je passe ensuite au cas où l'exposant n dans les différentielles précédentes est un nombre quelconque, et je donne tous les termes qui composent ces intégrales définies; Ce qui offre l'avantage de faire connaître leur ordre d'infini, ainsi que leurs rapports et différences,

qui souvent peuvent être des quantités finies. Ces préliminaires posés, je passe aux intégrales $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^m}{x^n}$, $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^m}{x^n}$, où il y a ceci de remarquable, que la première, lorsque n est un nombre entier $>$ 1 et $< m+1$, est toujours exprimée en termes finis par les logarithmes ou par la circonférence du cercle. L'intégrale définie est encore donnée ici avec tous ses termes, quelle que soit n.

Je considère également les intégrales $\int \frac{dx.\overline{\cos x.}^p \overline{\sin.x}^q}{x^n}$, qui sont exprimées dans certains cas sous forme finie par les logarithmes ou par la circonférence du cercle. Cet article est terminé par l'intégrale $\int \frac{e^{-x}.dx}{x^n}$ développée avec le même procédé, dont M.[r] MASCHERONI s'est servi pour intégrer $\int \frac{dx.\sin.x}{x}$: L'intégrale $\int \frac{e^{-ax}.dx}{x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, a, de même que $\int \frac{dx.\cos.ax}{x}$, la propriété de n'être point indépendante de a, et l'on a dans ces limites

$$\int \frac{dx\,(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log. a - \log. a'.$$

Dans le *second article* je considère l'intégrale $\int \frac{dx.\cos rx}{m^2+x^2}$, que M.[r] LAPLACE a donnée le premier. Cette intégrale se refuse aux méthodes exposées dans l'article précédent ; Mais par un double développement dû à un changement d'ordre dans les limites, elle est ramenée directement aux intégrales connues $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$, $\int \frac{dx}{1+m^2x^2}$; et le procédé met en évidence la formation des coëfficiens numériques qui affectent la valeur de ces intégrales. La même méthode est ensuite appliquée à divers autres exemples tirés des Mémoires de MM.[rs] LAPLACE, LEGENDRE et POISSON. En la généralisant je l'applique à la recherche des valeurs d'autres intégrales, telles que $\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m}$, $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2}$, etc., les expressions qui en résultent, peuvent donner quelques idées sur la nature de ces transcendantes.

Dans le *troisième article* je présente les valeurs de diverses intégrales définies qu'on obtient par un seul développement en série, qui les donne par l'intégration immédiate, ou les fait dépendre d'autres intégrales connues. C'est ainsi que je trouve les intégrales suivantes, entre les limites $x=0$, $x=\infty$;

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2} = \int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

$$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}+1};$$

$$\int \frac{xdx.\text{coséc}.2rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi.e^{2mr}}{e^{4mr}-1};$$

$$\int \frac{xdx.\cot.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-1};$$

Les intégrales qui en dérivent réunies à celles que M.r LAPLACE a déduites de la valeur de $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, étendent considérablement cette partie du calcul des intégrales définies.

ARTICLE PREMIER.

1. Soit $n < 2$, on aura, en mettant pour sin. x son développement en x, et intégrant

$$(1) \int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = \frac{x^{2-n}}{2-n} - \frac{x^{4-n}}{(4-n)\,1.2.3.} + \frac{x^{6-n}}{(6-n)\,1.2.3.4.5.} - \ldots\ldots$$

où la constante est nulle, lorsque l'intégrale commence avec x. Maintenant on a en général

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = -\frac{\cos.x}{x^n} - n\int \frac{dx.\cos.x}{x^{n+1}};$$

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{\sin.x}{x^n} + n\int \frac{dx.\sin.x}{x^{n+1}};$$

d'où l'on déduit par des substitutions successives

$$(2) \quad \begin{aligned} \int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = & -\frac{\cos.x}{x^n} - \frac{n.\sin.x}{x^{n+1}} \\ & + \frac{n(n+1).\cos.x}{x^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2).\sin.x}{x^{n+3}} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-3).\cos.x}{x^{n+m-2}} \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2).\sin.x}{x^{n+m-1}} \\ & + n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)\int \frac{dx.\sin.x}{x^{n+m}} \end{aligned}$$

m indique le nombre des termes qui précèdent le dernier, et il est de la forme $4p$, p étant un nombre entier positif.

Cela posé, si dans tous les termes du second membre de l'équation (2) on met pour $\sin.x$ et pour $\cos.x$, leurs développemens en x, et qu'après cette substitution on intégre le dernier terme, l'équation (2) ainsi transformée n'acquerra aucun terme constant à cause de la valeur de $n < 2$, et elle sera identique avec l'équation (1): Or puisque cette dernière équation est nulle lorsque $x=0$, il s'en suit qu'à cette limite, le second membre de l'équation (2), transformée comme on vient de dire, sera aussi nul.

Soit $x=m=\infty$; il est clair que tous les termes, qui dans le second membre de l'équation (2) précèdent le dernier, deviennent nuls; de manière cependant que la convergence diminue à mesure qu'on s'avance vers le dernier terme intégral, ainsi qu'on le voit par le rapport des coëfficiens des deux avant-derniers termes, rapport qui est l'unité, lorsque $x=m=\infty$: Ainsi le second membre se réduira à son dernier terme, qui est par conséquent la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.x}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, pourvu qu'on intégre en mettant pour $\sin.x$ son développement en x, et qu'on fasse $x=m=\infty$ après l'intégration, sans addition de constante arbitraire. D'après cela on aura

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x^n} = n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{dx.\sin.x}{x^{n+m}} =$$

$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\left\{\frac{x^{2-m-n}}{2-m-n} - \frac{1}{1.2.3.}\cdot\frac{x^{4-m-n}}{4-m-n}\right.$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.}\cdot\frac{x^{6-m-n}}{6-m-n} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\pm \frac{1}{1.2.3.(2\nu-1)}\cdot\frac{x^{2\nu-m-n}}{2\nu-m-n} \mp \ldots\right\}$$

ν est le nombre des termes, et l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que ν est impair ou pair. Faisons, dans le terme général $\pm \frac{1}{1.2.3\ldots(2\nu-1)}\cdot \frac{x^{2\nu-m-n}}{2\nu-m-n}$, $2\nu = m$; Ce terme général, multiplié par le coëfficient $n(n+1)\ldots(n+m-1)$, deviendra

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\ldots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{(-n)}.x^{-n} = -\frac{T}{(-n)}$$

en posant

$$T = \frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\ldots\frac{(n+m-2)}{(m-1)}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n};$$

Les termes qui suivent à droite du terme général

$-\frac{T}{(-n)}$, sont

$$+\frac{T}{2-n}\cdot\frac{x^2}{m(m+1)} - \frac{T}{4-n}\cdot\frac{x^4}{m(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots.$$

et ceux qui précèdent à gauche, sont

$$+\frac{T}{-n-2}\cdot\frac{(m-2)(m-1)}{x^2}-\frac{T}{-n-4}\cdot\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)}{x^4}+\ldots;$$

faisant $x=m=\infty$, on a

$$\frac{x^2}{m(m+1)}=1=\frac{(m-2)(m-1)}{x^2}=\frac{x^4}{m(m+1)(m+2)(m+3)}=\text{etc.}$$

Les deux suites précédentes deviennent donc respectivement

$$\frac{T}{2-n}-\frac{T}{4-n}+\frac{T}{6-n}-\ldots.$$

$$-\frac{T}{n+2}+\frac{T}{n+4}-\frac{T}{n+6}+\ldots.$$

Par conséquent on aura depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int\frac{dx.\sin.x}{x^n}=T.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\ldots\\[1ex]\frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\ldots\end{array}\right.$$

Mais on a

$$\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\ldots=\int\frac{u^{1-n}\,du}{1+u^2};$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\ldots=\int\frac{u^{-1+n}}{1+u^2}\,.\,du;$$

en faisant $u=1$ après l'intégration. Donc enfin on aura

$$\text{(A)}\qquad\int\frac{dx\,\sin.x}{x^n}=T\int\frac{u^{1-n}+u^{-1+n}}{1+u^2}\,.\,du$$

en faisant $u = 1$ après l'intégration, et $m = \infty$ dans la valeur de

$$T = \frac{n}{1} \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)}{3} \cdots \frac{(n+m-2)}{(m-1)} \cdot \frac{(n+m-1)}{m^n}.$$

2. Soit $n = 1$, on aura $T = 1$; $\int \frac{dx.\sin.x}{x} = 2 \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$.

C'est la valeur que prend la série

$$x - \frac{x^3}{1.2.3.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.5.} - \ldots\ldots\ldots$$

lorsque $x = \infty$.

Soit $n = \frac{1}{2}$, on aura

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-1}{2m\sqrt{m}}$$

$$= \frac{1.3.5.\ldots\ldots(2m-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

à cause de $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9\ldots}$;

Il reste donc à intégrer la différentielle $\frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2} . du$;

mais comme c'est ici qu'il s'est glissé dans les calculs de M.r Mascheroni une inadvertance qui a rendu inexacte la valeur de quelques intégrales définies, qu'il a données dans l'ouvrage cité, nous allons transcrire ses propres termes :

Nunc ut integretur $\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^2} . du$, *fiat* $u^2 = z$, *erit*

$$\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^2} du = 2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz =$$

$$\int \frac{dz}{1 + 2z\sqrt{\frac{1}{2}} + z^2} + \int \frac{dz}{1 - 2z\sqrt{\frac{1}{2}} + z^2} =$$

$$2\sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 + z\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2\sqrt{2}\, arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - z\sqrt{\frac{1}{2}}};$$

et quoniam sumi debet $u = 1$, *ac proinde etiam* $z = 1$, *erit*

$$\int \frac{u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}}{1 + u^2} . du = 2\sqrt{2}.arc.tang.22^{\circ}.30' + 2\sqrt{2}.arc.tang.67^{\circ}.30' = \pi.\sqrt{2};$$

Erit ergo tandem

$$\int \frac{dx.sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}.$$

Or on trouve

$$\int \frac{dz}{1 + 2z\sqrt{\frac{1}{2}} + z^2} + \int \frac{dz}{1 - 2z\sqrt{\frac{1}{2}} + z^2} = \sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 + z\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \sqrt{2}.arc.tang. \frac{z\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - z\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$ en faisant $z = 1$; Multipliant

donc la valeur de T trouvée précédemment par $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

on a

$$\int \frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

résultat égal à celui, auquel M.r Laplace est parvenu par des considérations d'un autre genre (*Journal de l'écol. polytechniq.* 15.e *cahier*). Dans ce même endroit M.r Laplace démontre l'inexactitude du résultat de M.r Mascheroni; mais on voit par ce qui précède, qu'elle ne tient point à la méthode.

3. Considérons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.x}{x^n}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, n étant < 1. On a

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x^{3-n}}{1.2.(3-n)} + \frac{x^{5-n}}{1.2.3.4.(5-n)} - \ldots\ldots$$

le second membre est nul avec x sans constante arbitraire. Par le procédé employé au n.° 1, on a encore

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x^n} = \frac{\sin.x}{x^n} - \frac{n.\cos.x}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)\sin.x}{x^{n+2}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-3)\sin.x}{x^{n+m-2}}$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-2)\cos.x}{x^{n+m-1}}$$

$$+ n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{dx.\cos.x}{x^{n+m}}$$

m indique le nombre des termes qui précèdent le der-

nier, et il est de la forme $4p$. Par un raisonnement analogue à celui fait dans le n.° 1, on prouvera qu'entre les limites $x=0$, $x=m=\infty$, on a

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=n(n+1)(n+2)....(n+m-2)(n+m-1)\int\frac{dx.\cos.x}{x^{n+m}}$$

pourvu qu'avant d'intégrer on mette dans le second membre le développement en x de $\cos.x$, et qu'on fasse $x=m=\infty$ après l'intégration, sans constante arbitraire. On aura donc

$$\int\frac{dx.\cos.x.}{x^n}=n(n+1)(n+2)....(n+m-1)\left\{\frac{x^{1-m-n}}{1-m-n}-\frac{1}{2}.\frac{x^{3-m-n}}{3-m-n}\right.$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.}.\frac{x^{5-m-n}}{5-m-n}-..................$$

$$\left.\pm\frac{1}{1.2.3...(2\nu-2)}.\frac{x^{2\nu-m-n-1}}{2\nu-m-n-1}\mp.....\right\}$$

ν est le nombre des termes; s'il est impair on prendra le signe $+$, s'il est pair on prendra le signe $-$: Soit $2\nu=m$; Le terme général multiplié par le coëfficient $n(n+1)...(n+m-1)$ deviendra

$$-\frac{n}{1}.\frac{(n+1)}{2}.\frac{(n+2)}{3}....\frac{(n+m-3)}{m-2}.\frac{(n+m-2)}{x}.\frac{(n+m-1)}{(-n-1)}.x^{-n}=\frac{-V}{-n-1}$$

en posant

$$V=\frac{n}{1}.\frac{(n+1)}{2}.\frac{(n+2)}{3}....\frac{(n+m-3)}{m-2}.\frac{(n+m-2)}{x}.\frac{(n+m-1)}{x^n};$$

Les termes qui suivent à droite, seront

$$+\frac{V}{1-n}\cdot\frac{x^2}{(m-1)m}\cdot-\frac{V}{3-n}\cdot\frac{x^4}{(m-1).m.(m+1)(m+2)}+\cdots$$

Les termes qui précèdent à gauche, seront

$$+\frac{V}{-3-n}\cdot\frac{(m-3)(m-2)}{x^2}-\frac{V}{-5-n}\cdot\frac{(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)}{x^4}+\cdots$$

dans le cas de $x=m=\infty$, ces deux suites deviennent

$$\frac{V}{1-n}-\frac{V}{3-n}+\frac{V}{5-n}-\cdots$$

$$-\frac{V}{3+n}+\frac{V}{5+n}-\frac{V}{7+n}+\cdots$$

On aura donc depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=V.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-n}-\frac{1}{3-n}+\frac{1}{5-n}-\cdots\\ \frac{1}{1+n}-\frac{1}{3+n}+\frac{1}{5+n}-\cdots\end{array}\right.$$

ou bien

$$(\mathrm{B})\qquad \int\frac{dx.\cos.x}{x^n}=V.\int\frac{u^n+u^{-n}}{1+u^2}\cdot du$$

en faisant $u=1$ après l'intégration, et $m=\infty$ dans la valeur de

$$V=\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\cdots\frac{(n+m-3)}{m-2}\cdot\frac{(n+m-2)}{m}\cdot\frac{(n+m-1)}{m^n}.$$

4. Soit $n=\frac{1}{2}$, on aura $V=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; $\int\frac{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}du=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$;

partant

$$\int\frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int\frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}}$$

Dans l'ouvrage de M.r Mascheroni on trouve encore ici l'inadvertance indiquée dans le n.° 2, à cause de l'intégrale $\int\frac{u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$; ce qui l'a porté à conclure $\int\frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}}=\sqrt{2\pi}$. Le même Géomètre a encore fait usage de ce résultat dans les deux intégrales données par Euler, $\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2}$; $\int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}$, pour lesquelles en posant $\frac{s^2}{2a^2}=x$, M.r Mascheroni trouve depuis $s=0$ jusqu'à $s=\infty$

$$\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2}=a.\sqrt{\pi}=\int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}$$

tandis que la vraie valeur est

$$\int ds.\sin.\frac{s^2}{2a^2}=\frac{a\sqrt{\pi}}{2}=\int ds.\cos.\frac{s^2}{2a^2}.$$

Aux intégrales

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int \frac{dx.\sin.x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int \frac{dx.\cos.x}{\sqrt{x}};$$

on peut joindre la suivante qui se présente également sous forme finie

$$\int \frac{dx.\sin.x}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$$

Cette dernière intégrale s'obtient aussi sous cette forme par l'équation (5), pag. 250 du Mémoire cité de M.r Laplace, où pour la valeur numérique de cette intégrale on doit lire 2,5066..., nombre au lieu duquel par faute d'impression on a mis 2,25066...

Ces intégrales paraissent les seules, que les formules (A) et (B) puissent donner sous forme finie: mais il est évident que ces mêmes formules donnent directement la valeur des intégrales $\int \frac{dx.\sin x}{x^n}$, $\int \frac{dx.\cos.x}{x^n}$ aussi approchées qu'on voudra, n étant comprise dans les limites indiquées.

5. Les méthodes précédentes sont dûes à M.r Mascheroni, et avant d'aller plus loin, nous présenterons ici le procédé, d'après lequel ce même Géomètre a déterminé la constante arbitraire, pour que l'intégrale

$\int \frac{dx.\cos.x}{x}$ soit nulle à $x = \infty$. On a

$$(1) \quad \int \frac{dx.\cos.x}{x} = \text{Const.} + \log.x - \frac{x^2}{1.2.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \dots$$

On a aussi

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x} = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} - \int \frac{2dx.\cos.x}{x^3}$$

$$(2) \quad = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} + B + \frac{1}{x^2} + \log.x$$

$$- \frac{x^2}{2.3.4} + \frac{x^4}{4.3.4.5.6} - \dots\dots$$

B étant la constante arbitraire, qui doit rendre nulle l'intégrale lorsque $x = \infty$. Substituant dans l'équation (2) les développemens de $\sin.x$ et de $\cos.x$, on aura deux termes constans, savoir 1 et $\frac{1}{2}$: tous les autres termes seront affectés de la variable x; en comparant donc l'équation (1) avec l'équation (2), on aura

$$\text{Const.} = B + 1 + \tfrac{1}{2}, \text{ ou } B = \text{Const.} - 1 - \tfrac{1}{2}.$$

Maintenant on a en général

$$\int \frac{dx.\cos.x}{x} = \frac{\sin.x}{x} - \frac{\cos.x}{x^2} - \frac{2\sin.x}{x^3} + \frac{2.3\cos.x}{x^4}$$

$$+ \frac{2.3.4\sin.x}{x^5} - \dots\dots + 2.3.4\dots.(m-1).\frac{\cos.x}{x^m}$$

$$+ \int 2.3.4\dots m.\frac{dx}{x^{m+1}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \dots\dots\right)$$

où la lettre m, qui indique le nombre des termes qui

précèdent le dernier, est de la forme $4p$, p étant un nombre entier positif. Intégrant le dernier terme de l'équation précédente on aura

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\frac{\sin.x}{x}-\frac{\cos.x}{x^2}-\frac{2.\sin.x}{x^3}+\frac{2.3.\cos.x}{x^4}+\frac{2.3.4.\sin.x}{x^5}$$

$$-\cdots\cdots+2.3.4\cdots(m-1)\,.\,\frac{\cos.x}{x^m}+M$$

$$(3)\qquad +2.3.4...m\left\{\frac{x^{-m}}{-m}-\frac{x^{2-m}}{2(2-m)}+\frac{x^{4-m}}{2.3.4.(4-m)}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{1.2.3.4...(m-2)\,.\,2x^2}\right\}+\log.x$$

$$-\frac{x^2}{2(m+1)(m+2)}+\frac{x^4}{4(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}-\cdots$$

M étant la constante arbitraire qui rend nulle l'intégrale lorsque $x=\infty$.

On aura semblablement

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\frac{\sin.x}{x}-\frac{\cos.x}{x^2}-\frac{2.\sin.x}{x^3}+\frac{2.3.\cos.x}{x^4}+\frac{2.3\,4.\sin.x}{x^5}$$

$$-\cdots\cdots\cdots+2.3.4...\,(m-1)\frac{\cos.x}{x^m}+2.3.4...\,m\frac{\sin.x}{x^{m+1}}$$

$$(4)\qquad -2.3.4...\,(m+1)\,.\,\frac{\cos.x}{x^{m+2}}$$

$$-\int 2.3.4...\,(m+2)\frac{dx}{x^{m+3}}\left\{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\cdots\right\}$$

Intégrant ce dernier terme on aura $N+\log.x+S$; N

étant la constante qui rend nulle l'intégrale lorsque $x=\infty$, et S étant la somme des termes affectés de la variable. En mettant dans cette équation (4) au lieu des termes $2.3.4\ldots m\cdot\frac{\sin.x}{x^{m+1}}$, $2.3.4\ldots(m+1)\cdot\frac{\cos.x}{x^{m+2}}$, leurs développemens en x, on aura les constantes $\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{m+2}$, qui ajoutées à N, donneront par la comparaison de l'équation (3) avec (4), $M=N+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}$; $N=M-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}$; et puisque le même résultat a lieu lorsque m est de la forme $4p+2$, on en conclura enfin

$$M=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots\ldots-\frac{1}{m};$$

Soit maintenant $x=m=\infty$, l'équation (3) deviendra

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log x$$
$$+\frac{m(m-1)}{2x^2}-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4x^4}+\ldots\ldots$$
$$-\frac{x^2}{2(m+1)(m+2)}+\frac{x^4}{4(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}-\ldots\ldots$$

La seconde ligne est formée par les termes qui dans l'équation (3) précèdent le terme $\log.x$, et qui ne sont pas nuls par la supposition de $x=m=\infty$; la troisième ligne est formée par les termes qui suivent $\log.x$

dans la même équation (3). Ces deux lignes se détruisent à cause de $x=m=\infty$; on a donc, lorsque $x=\infty=m$

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{m}+\log.x=0$$

d'où

$$\text{Const.}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{m}-\log.x\,;$$

ou bien, à cause de

$$\log.m=\log.x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}-\cdots$$

($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... étant les nombres de Bernoulli)

$$\text{Const.}=0,577\,215\,664\,9015\ldots\ldots$$

nombre connu, et que nous nommerons A dans la suite. (*Calcul Intégral de M.ʳ* Lacroix, *tom.* 3, *pag* 134 *et* 481).

Le second membre de l'équation

$$\int\frac{dx.\cos.x}{x}=0,577\,215\cdots+\log.x-\frac{x^2}{2.2}+\frac{x^4}{2.3.4.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6.6}+\cdots$$

sera donc nul lorsque $x=\infty$; de là on conclut entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$\text{(C)}\qquad\int\frac{dx.\cos.x}{x}=-\log.x-0,577\,215\cdots=-\log.0-\text{A}=\infty\,,$$

équation qui donne l'ordre d'infini de cette intégrale.

6. Avant de présenter l'usage des intégrales (A), (B), (C) pour la détermination d'autres intégrales définies, nous nous proposons de voir ce que deviennent les intégrales précédentes, lorsque les différentielles sont

$\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$; $\frac{dx.\cos.rx}{x^n}$; $\frac{dx.\cos.rx}{x}$; r étant un nombre quelconque constant. Considérons d'abord la première. Faisant $rx=z$, on a

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}=\frac{1}{r^{1-n}}.\int\frac{dz.\sin.z}{z^n},$$

les intégrales étant prises depuis $x=z=0$ jusqu'à $x=z=\infty$; mais on a dans ces limites (n.° 1)

$$\int\frac{dz.\sin.z}{z^n}=T.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\ldots\\ \frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\ldots\end{array}\right.$$

on aura donc

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}=\frac{T}{r^{1-n}}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2-n}-\frac{1}{4-n}+\frac{1}{6-n}-\ldots\\ \frac{1}{n}-\frac{1}{2+n}+\frac{1}{4+n}-\ldots\end{array}\right.$$

Or en intégrant directement la différentielle $\int\frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ par la méthode du n.° 1, on arrive à cette expression

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n} = T\,.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r}{2-n} - \dfrac{r^3}{4-n} + \dfrac{r^5}{6-n} - \ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2+n}\cdot\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{1}{4+n}\cdot\dfrac{1}{r^5} - \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ces deux expressions sont équivalentes; car en multipliant par r^{1-n} les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{r^{1-n}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2-n} - \dfrac{1}{4-n} + \dfrac{1}{6-n} - \ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2+n} + \dfrac{1}{4+n} - \ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \dfrac{r}{2-n} - \dfrac{r^3}{4-n} + \dfrac{r^5}{6-n} - \ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2+n}\cdot\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{1}{4+n}\cdot\dfrac{1}{r^5} - \ldots\ldots \end{array}\right.$$

la quantité r disparaît du premier membre, qui n'est plus fonction de cette lettre; par conséquent la différentielle du second membre par rapport à r doit être identiquement nulle : or c'est ce qui a effectivement lieu, car cette différentielle est

$$r^{1-n} - r^{3-n} + r^{5-n} - \ldots\ldots$$

$$- r^{-n-1} + r^{-n-3} - r^{-n-5} + \ldots\ldots$$

c'est-à-dire $\dfrac{r^{1-n} - r^{1-n}}{r + r^2} = 0$;

On a donc depuis $x = 0 = z$ jusqu'à $x = \infty = z$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n} = \frac{1}{r^{1-n}} \int \frac{dz.\sin.z}{z^n};$$

n étant < 2.

On trouve pareillement et dans les mêmes limites

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n} = \frac{1}{r^{1-n}} \int \frac{dz.\cos.z}{z^n};$$

n étant < 1.

Considérons enfin l'intégrale $\int \frac{dx \cos.rx}{x}$: Cette intégrale paraît d'abord indépendante de r, ainsi que l'est l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$; car en faisant $rx = z$, on a

$\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = \int \frac{dz.\cos.z}{z}$, les limites de ces deux intégrales étant zéro et infini. Mais une pareille transformation nous conduirait, dans ce cas, à un résultat inexact; car en faisant directement le calcul sur l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$, on arrive à l'équation suivante (n.° 5)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = \text{Const.} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots - \frac{1}{m} + \log.x$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2r^2x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4.r^4.x^4} + \frac{m(m-1)\ldots(m-5)}{6r^6x^6} - \ldots.$$
$$- \frac{r^2x^2}{2(m+1)(m+2)} + \frac{r^4x^4}{4(m+1)(m+2)\ldots(m+4)} - \frac{r^6x^6}{6(m+1)\cdots(m+6)} + \cdots$$

équation dans laquelle, lorsque r est différent de l'unité et qu'on fait $x=m=\infty$, les deux dernières lignes ne se détruisent plus, mais on a

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x}=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log.x$$

$$+\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{4r^4}+\frac{1}{6r^6}-\ldots.$$

$$-\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}+\ldots..$$

$$=\text{Const.}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{m}+\log.x-\log.r;$$

on a donc

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x}=\text{A}+\log r+\log.x-\frac{r^2x^2}{1.2.2}+\frac{r^4x^4}{2.3.4.4}-\frac{r^6x^6}{2.3.4.5.6.6}+\ldots$$

la constante étant déterminée de manière que le second membre est nul lorsque $x=\infty$. Partant on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\text{(D)}\quad \int\frac{dx.\cos.rx}{x}=-\log.x-\log.r-\text{A}=-\log.0-\log.r-\text{A}=\infty;$$

où $\text{A}=0,577\,215\ldots.$

On voit par cette expression que les deux intégrales $\int\frac{dx.\cos.x}{x}$, $\int\frac{dx.\cos.rx}{x}$, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, ne sont égales qu'en ce que toutes les deux sont infinies du même ordre; mais leur différence est finie, et l'on a en général ce résultat remarquable

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x} = \log.r - \log.r' .$$

7. Considérons à présent l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, n étant un nombre entier égal à 2 ou plus grand que ce nombre : Soit d'abord n paire, on aura

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = \frac{-\sin.rx}{x} + r\int \frac{dx.\cos.rx}{x} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^4} = -\frac{\sin.rx}{3x^3} - \frac{r.\cos.rx}{3.2x^2} + \frac{r^2\sin.rx}{3.2.1.x} - \frac{r^3}{3.2.1}\int \frac{dx.\cos.rx}{x}$$

en général

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{2n}} = -\frac{\sin.rx}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{r.\cos.rx}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}} + \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots3.2.1}\int \frac{dx.\cos.rx}{x} ;$$

on prendra le signe + ou — selon que n est impaire ou paire. On voit par là que toutes ces intégrales se ramènent à $\int \frac{dx.\cos rx}{x}$; et les équations précédentes donnent tous les termes qui composent ces intégrales : ainsi l'on a depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = -r.\log.x - r.\log.r - Ar + r$$
$$= -r.\log.0 - r.\log.r - Ar + r = \infty ;$$

etc.

On aura pareillement

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^3} = \frac{-\sin.rx}{2x^2} - \frac{r\cos.rx}{2x} - \frac{r^2}{2.1}\int \frac{dx\sin.rx}{x},$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^5} = \frac{-\sin.rx}{4x^4} - \frac{r\cos.rx}{4.3.x^3} + \frac{r^2.\sin.rx}{4.3.2.x^2} + \frac{r^3.\cos.rx}{4.3.2.1x} + \frac{r^4}{4.3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x},$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{2n+1}} = \frac{-\sin.rx}{2nx^{2n}} - \frac{r.\cos.rx}{2n(2n-1)x^{2n-1}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{r^{2n}}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

le signe $+$ a lieu si n est paire; le signe $-$, si n est impaire.

On aura ainsi depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^3} = \frac{r}{x} - \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{r}{0} - \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \infty;$$

etc.

Ces équations ont le même avantage que les précédentes, celui de mettre en évidence tous les termes de l'intégrale et son ordre d'infini, ce qui fournit le moyen d'avoir le rapport ou la différence de ces mêmes intégrales: Ainsi l'on a, par exemple,

$$\frac{\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2}}{\int \frac{dx.\sin.rx}{x^3}} = 0; \quad \frac{\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2}}{\int \frac{dx.\cos.rx}{x}} = r;$$

$$\int \frac{dx.(\sin.x - x.\cos.x)}{x^2} = 1;$$

etc.

Si n est de la forme $p + \frac{\alpha}{\beta}$, p étant un nombre entier égal à 2 ou plus grand que 2, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre, on arrivera à l'une ou à l'autre de ces intégrales $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, $\int \frac{dx \sin rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, que l'on sait intégrer par les équations (A) et (B) (n.os 1 et 3) et l'on aura par là tous les termes de l'intégrale. Ainsi on a

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2.\sin.rx}{3.x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2^2r.\cos.rx}{3.1.x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^2r^2}{3.1.}\int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}};$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-2.\sin.rx}{(2n-1)x^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{2^2.r\cos.rx}{(2n-1)(2n-3)x^{\frac{2n-3}{2}}} + \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{2^n r^n}{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1.}\int \frac{dx.\begin{matrix}\cos.rx\\ \sin.rx\end{matrix}}{\sqrt{x}};$$

le signe + a lieu si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$; le signe —, si n est de la forme $4p+3$ ou $4p+2$: On écrira $\cos.rx$, lorsque n est impaire, et $\sin.rx$, lorsque n est paire.

Ainsi l'on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2r}{\sqrt{x}} - \frac{4r^2}{3.1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \frac{2r}{\sqrt{0}} - \frac{4r^2}{3.1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty\,;$$

etc.

8. On a semblablement

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{-\cos.rx}{x} - r.\int \frac{dx.\sin.rx}{x}\,;$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^4} = \frac{-\cos.rx}{3x^3} + \frac{r.\sin.rx}{3.2.x^2} + \frac{r^2.\cos.rx}{3.2.1.x} + \frac{r^3}{3.2.1}\cdot\int \frac{dx.\sin.rx}{x}\,;$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{2n}} = \frac{-\cos.rx}{(2n-1)x^{2n-1}} + \frac{r.\sin.rx}{(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}$$

$$+ \frac{r^2.\cos.rx}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)x^{2n-3}}$$

$$- \cdots\cdots \pm \frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots 3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x}\,;$$

On prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que n est paire ou impaire. Ainsi on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{x} - r.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} - r.\frac{\pi}{2} = \infty\,;$$

etc.

On a de la même manière

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^3} = \frac{-\cos.rx}{2x^2} + \frac{r.\sin.rx}{2.1.x} - \frac{r^2}{2.1.}\int \frac{dx.\cos.rx}{x}\,;$$

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^5}=\frac{-\cos.rx}{4x^4}+\frac{r.\sin.rx}{4.3.x^3}+\frac{r^2\cos.rx}{4.3.2.x^2}-\frac{r^3\sin.rx}{4.3.2.1.x}$$

$$+\frac{r^4}{4.3.2.1}\int\frac{dx.\cos.rx}{x};$$

$$\vdots$$

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^{2n+1}}=\frac{-\cos.rx}{2nx^{2n}}+\frac{r.\sin.rx}{2n(2n-1)x^{2n-1}}+\frac{r^2\cos.rx}{2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-2}}$$

$$-\cdots\cdots\pm\frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\cdots 3.2.1.}\int\frac{dx.\cos.rx}{x};$$

On prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que n est paire ou impaire.

On déduit ainsi depuis $x=0$ jusqu'à x infini,

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^3}=\frac{1}{2x^2}-\frac{3r^2}{4}+\frac{r^2}{2}.\left\{A+\log.r+\log.x\right\}$$

$$=\frac{1}{2.0^2}-\frac{3.r^2}{4}+\frac{r^2}{2}.\left\{A+\log.r+\log.0\right\};$$

etc.

Si n est de la forme $p+\frac{\alpha}{\beta}$, l'intégrale $\int\frac{dx.\cos.rx}{x^{p+\frac{\alpha}{\beta}}}$

dépendra de l'une des intégrales $\int\frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, $\int\frac{dx.\sin.rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$:

On a par exemple

$$\int\frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{-2.\cos.rx}{\sqrt{x}}-2r.\int\frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}};$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-2.\cos.rx}{(2n-1)x^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{2^2 r.\sin.rx}{(2n-1)(2n-3)x^{\frac{2n-3}{2}}}$$

$$+ \frac{2^3.r^2.\cos.rx}{(2n-1)(2n-3)(2n-5).x^{\frac{2n-5}{2}}} - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{2^n.r^n}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3.1} \int \frac{dx.\begin{matrix}\cos.rx\\ \sin rx\end{matrix}}{\sqrt{x}} :$$

On prendra le signe +, si n est de la forme $4p$ ou $4p+3$; on prendra le signe —, si n est de la forme $4p+1$ ou $4p+2$: on écrira $\cos.rx$, si n est paire, et $\sin.rx$, si n est impaire.

On conclut de là

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{2r\pi} = \frac{2}{\sqrt{0}} - \sqrt{2r\pi} = \infty \text{ ; etc.}$$

9. On voit par les deux numéros précédens, que $\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est toujours infinie, lorsque $n=2$ ou >2 : L'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n}$ est également infinie dans les mêmes limites, lorsque $n=1$ ou >1 : Mais l'ordre de ces infinis varie suivant la valeur de l'exposant n, et les équations précédentes donnent immédiatement tous les ter-

mes qui forment ces intégrales. On peut par là en déduire des résultats assez remarquables, et qu'il paraît difficile à pouvoir obtenir par d'autres moyens; ainsi l'on a par les n.os précédens,

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x^2} = (r - r')\frac{\pi}{2};$$

et faisant $r = 1$, on a

$$\int \frac{dx.(\sin x - x\cos.x)}{x^3} = \frac{\pi}{4};$$

$$\int \frac{dx.(\sin.x - x.\cos.x)}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

etc.

ces intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

10. Passons maintenant aux intégrales renfermant des puissances de $\sin.rx$ et $\cos.rx$, et considérons en premier lieu l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, q étant un nombre entier positif, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre: On a

$$2^{2q-1}\,\overline{\sin.rx}^{2q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ q}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+1)}\cos.2rx$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ (q+2)}\cdot\cos.4rx$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}\cos.6rx$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp 2q.\cos.(2q-2)rx \pm \cos.2qrx\,;$$

formule dans laquelle les signes sont alternativement positifs et négatifs. Multipliant les deux membres de cette équation par $\frac{dx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, et intégrant, on aura

$$2^{2q-1}.\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}=\frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots q}.\frac{x^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+1)}\int\frac{dx.\cos.2rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}\int\frac{dx.\cos.4rx}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la constante est nulle avec x. Lorsque $x=\infty$, le premier terme du second membre devient infni, et tous les termes suivans sont finis: L'intégrale dont il s'agit est donc un infini de l'ordre $1-\frac{\alpha}{\beta}$, et l'équation précédente donne tous les termes qui en composent la valeur.

On trouve, par exemple, entre les limites $x=0$, $x=\infty$

$$2\cdot\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}=2\sqrt{\infty}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}=\infty.$$

Soit à présent $\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}$; on trouvera depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots q}\log.\infty$$

$$+\left\{\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots(q+1)}-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots(q+2)}\right.$$

$$\left.+\ldots\mp 2q\pm 1\right\}\left\{A+\log.r\right\}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots(q+1)}\log.2-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots(q+2)}\log.4$$

$$+\ldots\mp 2q.\log.(2q-2)\pm\log.2q:$$

Cette équation montre que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, est infinie, et que l'ordre de cet infini est le même quelque soit le nombre entier positif q. Ainsi on a en général

$$\frac{\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x}}{\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q'}}{x}}=\frac{2^{2q'}}{2^{2q}}\cdot\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q+1)}{1.\;\;2.\;\;\;3.\ldots q}\cdot\frac{1}{2q'}\cdot\frac{2}{(2q'-1)}\cdot\frac{3}{(2q'-2)}\cdots\frac{(q')}{(q'+1)}$$

On a aussi

$$\int \frac{dx.(3.\overline{\sin.rx}^2 - 4\,\overline{\sin.rx}^4)}{x} = \frac{\log.2}{2}$$

etc.

11. Considérons l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$, où n est un nombre entier positif, qui ne peut être <1, ni $>q$; on aura

$$2^{2q-1}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}} = \frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)....(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\,.\,.\,.\,.\,q.}.\frac{1}{(1-2n)x^{2n-1}}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)...\,q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}\int \frac{dx.\cos.2rx}{x^{2n}}$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\,...\,(q+2)}\int \frac{dx.\cos.4rx}{x^{2n}}$$

$$-\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$\mp 2q\int \frac{dx.\cos.(2q-2)rx}{x^{2n}} \pm \int \frac{dx.\cos.2qrx}{x^{2n}}\,;$$

Dans cette équation tout est connu, parceque les intégrales qui entrent dans le second membre, sont données par le n.° 8: mais, sans passer par le développement de ces intégrales, on peut avoir tout de suite la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$ par les considérations suivantes. Si l'on met pour $\overline{\sin.rx}^{2q}$ son développement en x,

et qu'on intègre la différentielle $\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}}$, il est visible que l'intégrale sera nulle avec x sans constante arbitraire. Mais l'équation précédente doit être identique avec l'intégrale développée de la manière dont nous venons de dire, pourvu qu'on y substitue au lieu des fonctions circulaires leurs développemens dans les termes $\int\frac{dx.\cos.2rx}{x^{2n}}$, $\int\frac{dx.\cos.4rx}{x^{2n}}$, etc. Cette équation est donc aussi nulle avec x. Mais lorsque x est infini, l'équation précédente devient, en notant que dans ce cas on a (n° 8).

$$\int\frac{dx\cos.2rx}{x^{2n}} = \pm\,\frac{(2r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\int\frac{dx\,\sin.2rx}{x}$$

$$= +\,\frac{(2r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$\int\frac{dx.\cos.4rx}{x^{2n}} = \pm\,\frac{(4r)^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2};$$

etc.

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q}}{x^{2n}} = \pm\,\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left\{\frac{-2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ldots(q+1)}\cdot 2^{2n-1}\right.$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ldots(q+2)}\cdot 4^{2n-1}$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ldots(q+3)}\cdot 6^{2n-1}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$\mp 2q(2q-2)^{2n-1} \pm (2q)^{2n-1} \Big\}.$$

Si n est paire, on prendra $+ r^{2n-1}$; si n est impaire, on prendra $- r^{2n-1}$: Les termes affectés des puissances 2^{2n-1}, 4^{2n-1}, etc., se suivent avec les signes alternatifs. L'on a ainsi depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2} = \frac{r\pi}{2};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^2} = \frac{r\pi}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^4} = \frac{r^3\pi}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^2} = \frac{3r\pi}{16};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{10}}{x^2} = \frac{35.r\pi}{256};$$

etc.

12. On aura pareillement entre les limites $x=0$, $x=\infty$, en notant que

$$0 = \frac{-2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.2^{2n} + \frac{2q(2q-1)(2q-2.)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}.4^{2n}$$

$$\frac{-2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}.6^{2n} + \ldots \mp 2q.(2q-2)^{2n} \pm (2q)^{2n},$$

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin rx}^{2q}}{x^{2n+1}}=\pm\frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\ldots3.2.1}\left\{\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.2^{2n}.\log.2\right.$$

$$-\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.4^{2n}.\log.4$$

$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.6^{2n}.\log 6$$

$$\vdots$$

$$\left.\pm 2q.(2q-2)^{2n}.\log.(2q-2)\mp(2q)^{2n}.\log.2q\right\}:$$

Dans ces deux équations n est un nombre entier positif, qui ne peut être <1, et qui doit être $<q$: Si n est paire, on prendra $+r^{2n}$; si n est impaire, on prendra $-r^{2n}$: Les termes affectés des logarithmes, log 2, log. 4, etc. se suivent avec les signes alternatifs. L'on a, par exemple,

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^3}=r^2.\log.2;$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^3}=\left(\frac{24.\log 2-9.\log 3}{16}\right).r^2;$$

$$\int\frac{dx\,\overline{\sin rx}^6}{x^5}=\left(\frac{27\log.3-32.\log.2}{16}\right).r^4;$$

etc.

13. D'après ce qui précède on voit que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\sin rx}^{2q}}{x^{n+\frac{a}{b}}}$ dépend des formules (A) et (B) (n.os 1 et 3);

n étant un nombre entier, et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction propre, de manière que $n+\frac{\alpha}{\beta}<2q+1$. Nous nous occuperons seulement du cas où $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2}$, car alors la valeur de l'intégrale se présente sous forme finie. Par le même raisonnement fait au n.° 11, on aura

$$2^{2q-1}\int\frac{dx.\overline{\sin. x}^{2q}}{x^{n+\frac{1}{2}}}=\pm\frac{2^{2n-1}.r^{n-\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3.1.}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2q.(2q-1)(2q-2)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}\\ +\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}2^{n-\frac{1}{2}}\\ -\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+3)}.3^{n-\frac{1}{2}}\\ \vdots\\ \mp 2q(q-1)^{n-\frac{1}{2}}\pm q^{n-\frac{1}{2}}\end{array}\right\};$$

où l'on prendra le signe +, si n est de la forme $4p$ ou $4p+3$: on prendra le signe —, si n est de la forme $4p+1$ ou $4p+2$. Les termes renfermés dans les parenthèses se suivent avec les signes alternatifs. On trouve, par exemple

$$\int\frac{dx\,\overline{\sin. rx}^{2}}{x\sqrt{x}}=\sqrt{\pi r};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{4r.\sqrt{\pi.r}}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{a\sqrt{x}} = \frac{(4-\sqrt{2})\sqrt{\pi r}}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin rx}^4}{a^2\sqrt{x}} = \frac{r(4-2\sqrt{2})\sqrt{\pi r}}{3};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{a^5\sqrt{x}} = \left(\frac{15-6.2^4.\sqrt{2}+3^4.\sqrt{3}}{9.7.5.3.1}\right) 2^4.r^4\sqrt{\pi r};$$

etc.

14. De l'équation

$$2^{2q}.\overline{\sin.rx}^{2q+1} = \frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+1)}\sin.rx$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}\sin.3rx$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+3)}.\sin.5rx$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1)\sin.(2q-1)rx \mp \sin.(2q+1)rx;$$

et de ce que l'on a

$$0 = \frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+1)}$$

$$-\frac{(2q+1).2q(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+2)}3^{2n-1}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(q+3)}.5^{2n-1}$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1).(2q-1)^{2n-1}\mp(2q+1)^{2n-1};$$

n étant un nombre entier positif tel que $n < q+1$; on conclura depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$2^{2q}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{2n}}=\pm\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)(2n-2)\ldots 3.2.1.}\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.3^{2n-1}.\log.3\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}.5^{2n-1}.\log.5$$

$$+\frac{(2q+1)\,2q.(2q-1)\ldots(q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+3)}.7^{2n-1}.\log.7$$

$$\vdots$$

$$\left.\mp(2q+1)(2q-1)^{2n-1}.\log.(2q-1)\pm(2q+1)^{2n-1}.\log.(2q+1)\right\}:$$

on prendra $+r^{2n-1}$, si n est impaire, et $-r^{2n-1}$, si n est paire. Les termes renfermés dans les parenthèses ont les signes alternatifs. On a ainsi ces intégrales,

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{3}}{x^{2}}=\frac{3r.\log.3}{4};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{5}}{x^{2}}=\left(\frac{15.\log.3-5.\log.5}{16}\right).r;$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin rx}^{5}}{x^{4}}=\left(\frac{5^{3}.\log.5-5.3^{3}.\log.3}{16}\right).\frac{r^{3}}{1.2.3};$$

etc.

15. On aura encore, n étant un nombre entier positif, tel que $n < q+1$,

$$2^{2q}\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{2n+1}}=\pm\frac{r^{2n}}{2n(2n-1)\ldots 3.2.1}.\frac{\pi}{2}.\left\{\frac{(2q+1)2q(2q-1)\ldots(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots(q+1)}\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.3^{2n}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3...(q+3)}.5^{2n}$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1)(2q-1)^{2n}\mp(2q+1)^{2n}\Big\};$$

où l'on prendra $+r^{2n}$, si n est paire, et $-r^{2n}$, si n est impaire. Les autres termes ont les signes alternatifs. On en déduit ces exemples,

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{3}}{x^3}=\frac{3r^2.\pi}{8};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{5}}{x^3}=\frac{5r^2.\pi}{32};$$

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{5}}{x^5}=\frac{115.r^4.\pi}{384};$$

etc.

Si $n=0$, la formule précédente est remplacée par celle-ci

$$2^{2q}.\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x}=\frac{\pi}{2}.\Big\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+2)}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3....(q+3)}$$

$$\vdots$$

$$\pm(2q+1)\mp1\Big\};$$

qui donne

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x} = \frac{\pi}{4} ;$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x} = \frac{3\pi}{16} ;$$

etc.

16. L'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{n+\frac{\alpha}{\beta}}}$ dépend des intégrales (A) et (B) (n.os 1 et 3), n étant zéro, ou un nombre entier quelconque tel que $n+\frac{\alpha}{\beta} < 2q+2$; $\frac{\alpha}{\beta}$ étant une fraction propre. Nous considérerons le cas de $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$, pour lequel on trouve

$$2^{2q}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \pm \frac{2^{n-\frac{1}{2}}.r^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1.}\sqrt{\pi}.\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots(q+1)}{1. \quad 2. \quad 3.\ldots(q+1)}\right.$$

$$-\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots q}{1. \quad 2. \quad 3\ldots(q+2)}.3^{n-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots\ldots(q-1)}{1. \quad 2. \quad 3\ldots\ldots(q+3)}.5^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\left.\pm(2q+1)(2q-1)^{n-\frac{1}{2}} \mp (2q+1)^{n-\frac{1}{2}}\right\} :$$

On prendra le signe +, si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$; et le signe $-$, si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$. Les autres termes sont alternativement positifs et négatifs. On tire de là ces intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{3}}{x\sqrt{x}} = \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2r\pi}}{4};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{3}}{x^{2}\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{3}-1).r\sqrt{2r\pi}}{2};$$

etc.

Si $n=0$, l'équation précédente est remplacée par celle-ci

$$2^{2q}\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2q+1}}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots.(q+1)}{1.\;2.\;3\ldots.(q+1)} \\ -\dfrac{(2q+1)2q.(2q-1)\ldots.q}{1.\;2.\;3\ldots(q+2)}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ +\dfrac{(2q+1).2q.(2q-1)\ldots.(q-1)}{1.\;2.\;3\ldots.(q+3)}.\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \vdots \\ \pm(2q+1).\dfrac{1}{\sqrt{2q-1}} \mp \dfrac{1}{\sqrt{2q+1}} \end{array}\right\};$$

L'on a ainsi

$$\int \frac{dx.\overline{\sin rx}^{3}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\right).\sqrt{\frac{\pi}{2r}};$$

etc.

17. Passons à l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q}}{x^n}$, où n est un nombre quelconque < 1; Il est clair que cette intégrale est nulle avec x: Maintenant on a

$$2^{2q-1}.\overline{\cos.rx}^{2q} = \frac{1}{2}.\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots.(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots q}$$
$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots.q}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+1)}.\cos.2rx$$
$$+\frac{2q(2q-1)(2q-2)\ldots(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots(q+2)}.\cos.4rx$$
$$\vdots$$
$$+2q\cos.(2q-2)rx+\cos.2qrx.$$

Si on multiplie cette équation par $\frac{dx}{x^n}$ et qu'on l'intègre; le premier terme du second membre sera infini avec x, tandis que les termes suivans seront finis entre les limites $x=0$, $x=\infty$. L'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q}}{x^n}$ prise dans ces limites est donc un infini de l'ordre $1-n$. On aura ainsi par l'équation précédente tous les termes qui composent la valeur de cette intégrale.

Soit à présent $\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q+1}}{x^n}$, n étant aussi < 1; il est visible que cette intégrale est nulle avec x: on a

$$2^{2q}.\overline{\cos.rx}^{2q+1} = \frac{(2q+1)2q.(2q-1)...(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}.\cos.rx$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+2)}.\cos.3rx$$

$$+\frac{(2q+1)\,2q.(2q-1)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3......(q+3)}.\cos.5rx$$

$$\vdots$$

$$+(2q+1)\cos.(2q-1)rx+\cos.(2q+1)rx:$$

Multipliant cette équation par $\frac{dx}{x^n}$ et intégrant, on voit que l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\cos.rx}^{2q+1}}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est finie et dépend de la formule (B) (n.° 3). Soit $n=\frac{1}{2}$, on aura

$$2^{2q}\int\frac{dx\,\overline{\cos.rx}^{2q+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}.\left\{\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...(q+1)}{1.\quad 2.\quad 3...(q+1)}\right.$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...q}{1.\quad 2.\quad 3...(q+2)}.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{(2q+1).2q.(2q-1)...(q-1)}{1.\quad 2.\quad 3....(q+3)}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\vdots$$

$$\left.+(2q+1).\frac{1}{\sqrt{2q-1}}+\frac{1}{\sqrt{2q+1}}\right\}:$$

d'où l'on tire

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left\{3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,;$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^5}{\sqrt{x}} = \frac{1}{24}\left\{10 + \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,;$$

etc.

18. Nous avons supposé dans les n.os précédens, que l'exposant de x dans le dénominateur était renfermé entre certaines limites par rapport à l'exposant du numérateur: mais il est visible par ce qui précède, qu'on peut toujours avoir, quelle que soit la puissance de x, tous les termes qui composent la valeur de l'intégrale demandée. Ainsi on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.x}^3}{x^5} = \frac{1}{4}\int\left\{\frac{3dx.\sin.rx}{x^5} - \frac{dx.\sin.3rx}{x^5}\right\}$$

$$= \frac{r^3}{x} - \frac{3.26}{2.3.4}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{r^3}{0} - \frac{3.26}{2.3.4}\cdot\frac{\pi}{8} = \infty\,;$$

d'où l'on conclut, entre ces limites,

$$\int\left(\frac{x^3 - \overline{\sin.x}^3}{x^5}\right)dx = \frac{3.26}{2.3.4}\cdot\frac{\pi}{8}\,.$$

19. Il est facile de ramener aux intégrales des n.os précédens celles de la forme $\int \frac{dx\,\overline{\sin.rx}^p\,.\,\overline{\cos.r'x}^q}{x^n}$, p et q étant des nombres entiers positifs, et r, r' des nombres quelconques constans. Considérons l'intégrale $\int \frac{dx.\sin rx\cos.r'x}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et

supposons $r > r'$; nous aurons, en vertu de l'équation $2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.(r+r')x + \sin.(r-r')x$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{\sqrt{x}} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{r+r'}} + \frac{1}{2\sqrt{r-r'}} \right\} . \sqrt{\frac{\pi}{2}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos r'x}{x} = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos r'x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r+r')} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r-r')} .$$

Soit à présent $r = r'$, on aura

$$2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.2rx ;$$

partant

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} . \sqrt{\frac{\pi}{r}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x} = \frac{\pi}{4} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\pi.r} .$$

Soit enfin $r < r'$, on aura

$$2.\sin.rx.\cos.r'x = \sin.(r+r')x - \sin.(r'-r)x ,$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{r'+r}} - \frac{1}{2\sqrt{r'-r}} \right) . \sqrt{\frac{\pi}{2}} ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x} = 0 ;$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2} . \sqrt{2\pi(r'+r)} - \frac{1}{2} \sqrt{2\pi(r'-r)} .$$

On peut remarquer que la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x}$ ne contient point les coëfficiens r, r'; mais qu'elle dépend uniquement du signe de la quantité $r-r'$: Mr LEGENDRE a considéré cette intégrale dans son ouvrage intitulé *Exercices de Calcul intégral*, pag. 361. Pareillement la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx \sin.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$ est indépendante de la grandeur du coëfficient r, mais elle varie avec le signe de ce coëfficient: Ainsi il est aisé de voir que l'on a

lorsque $r>0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{x}=\frac{\pi}{2}$;

$r=0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{x}=0$;

$r<0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin rx}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

Il est encore important de remarquer, que la valeur de l'intégrale définie peut paraître imaginaire, en changeant le signe de quelque constante dont elle est fonction, quoique cette valeur soit réelle. Dans ce cas on doit introduire ces changemens de signe dans la différentielle elle-même, et chercher ensuite sa valeur intégrale. D'après cela, puisque $\sin.rx$ est positif, nul ou négatif, selon que r est positif, nul ou negatif, on aura

lorsque $r > 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$;

$$r = 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$r < 0 \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2r}}.$$

Considérons encore quelques autres exemples: on a

$$\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2 = \frac{\sin.(r+2r')x}{4} + \frac{\sin.(r-2r')x}{4} + \frac{\sin.rx}{2};$$

de cette équation on déduit, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

lorsque $r > 2r' \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{2}$;

$$r = 2r' \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx\,\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{3\pi}{8};$$

$$r < 2r' \ldots\ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

Ces diverses valeurs ne dépendent que du signe de la quantité $r-2r'$. On trouve de la même manière, et dans les mêmes limites, en vertu de l'équation

$$\overline{\text{Sin}.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2 = -\frac{\cos.(2r+2r')x}{8} + \frac{\cos.2r'x}{4} - \frac{\cos.(2r-2r')x}{8}$$

$$-\frac{\cos.2rx}{4} + \frac{1}{4};$$

lorsque $2r > 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2\,\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi}{4}.(2r-r')$;

$$2r = 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{4};$$

$$2r < 2r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2} = \frac{\pi r}{4}.$$

Soit enfin l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$: On a

$$\overline{\text{Sin}.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3 = -\frac{\cos.(2r+3r')x}{8} + \frac{\cos.3r'x}{8} - \frac{\cos.(2r-3r')x}{16}$$
$$-\frac{3.\cos.(2r+r')x}{16} + \frac{3.\cos.r'x}{8} - \frac{3.\cos.(2r-r')x}{16};$$

On aura donc

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}.\left\{-\frac{1}{2\sqrt{2r+3r'}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}} - \frac{1}{2\sqrt{2r-3r'}}\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2\sqrt{2r+r'}} + \frac{3}{\sqrt{r'}} - \frac{3}{2\sqrt{2r-r'}}\right\};$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2\,\overline{\cos.r'x}^3}{x} = \frac{1}{16}.\log.\left\{\frac{(2r+r')^3.(2r-r')^3(2r+3r')(2r-3r')}{9.r'^8}\right\};$$

etc.

Si l'une des quantités $2r-3r'$, $2r-r'$, ou toutes les deux sont négatives, on écrira à leur place, dans ces valeurs, les quantités $3r'-2r$, $r'-2r$; ce qui résulte de ce qu'on a $\cos.(2r-3r')x = \cos.(3r'-2r)x$;

$\cos.(2r-r')x = \cos.(r'-2r)x$, et de ce que l'intégrale $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}\,\overline{\cos.r'x}^{3}}{x^n}$ est réelle, tant que les nombres r et r' sont réels, quelqu'en soit d'ailleurs le rapport. Cette remarque doit s'étendre aux cas semblables.

Soit $r=r'$, on aura

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}.\,\overline{\cos.rx}^{3}}{x} = \frac{\log.15}{16};$$

Soit $2r=3r'$, on aura

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2}\,\overline{\cos.\frac{2rx}{3}}^{3}}{x} = \frac{9}{16}.\log.2 - \frac{1}{16}\left\{A+\log.r+\log.\infty\right\} = -\infty.$$

Il est facile de voir, par ces divers exemples, le procédé qu'on doit suivre pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx\,\overline{\sin.rx}^{p}\,\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^n}$, procédé qui se réduit à substituer à la place du produit $\overline{\sin.rx}^{p}.\overline{\cos.r'x}^{q}$ son expression équivalente en un nombre fini de termes de la forme $\sin.rx$ ou $\cos.rx$, ce qui est toujours possible, p et q étant des nombres entiers.

20. Nous terminerons cet article en appliquant à l'intégrale $\int \frac{e^{-x}dx}{x^n}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, la méthode avec laquelle M.[r] Mascheroni a trouvé la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.x}{x^n}$. En mettant pour e^{-x} son dé-

veloppement en x, et intégrant, on a

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x^{2-n}}{2-n} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{x^{4-n}}{4-n} + \ldots .$$

Cette intégrale est nulle avec x, lorsque $n < 1$. Supposons donc $n < 1$: Intégrant successivement par rapport au facteur $e^{-x}dx$, on a encore

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \frac{-e^{-x}}{x^n} + \frac{ne^{-x}}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)e^{-x}}{x^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)e^{-x}}{x^{n+3}} - \ldots$$

$$\ldots \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{e^{-x}dx}{x^{n+m}};$$

où m indique le nombre des termes qui précédent le dernier; et l'on prendra le signe supérieur ou l'inférieur, selon que m est paire ou impaire. En faisant sur cette équation les mêmes raisonnemens rapportés au n.° 1, on verra que cette expression est aussi nulle avec x. Soit $x=m=\infty$; l'équation précédente donnera

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\int \frac{e^{-x}dx}{x^{n+m}};$$

le second membre devant être intégré sans addition de constante arbitraire, et en y substituant pour e^{-x} son développement en x, en posant $x=m=\infty$ après l'intégration. On aura donc

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x^n} = \pm n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)\left\{ \frac{x^{1-m-n}}{1-m-n} - \frac{x^{2-m-n}}{2-m-n} \right.$$

$$+ \frac{x^{3-m-n}}{1.2.(3-m-n)} - \frac{x^{4-m-n}}{1.2.3.(4-m-n)} + \ldots\ldots$$

$$\left. \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(\nu-1)} \cdot \frac{x^{\nu-m-n}}{\nu-m-n} \pm \ldots\ldots \right\} :$$

ν est le nombre des termes, et l'on prendra le signe $+$ ou le signe $-$ selon que ce nombre est impair ou pair.

Soit m paire, et soit $\nu = m$, le terme général du développement précédent, multiplié par le coëfficient $n(n+1)\ldots(n+m-1)$, deviendra

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n}\cdot\frac{1}{(-n)} = -\frac{T}{(-n)},$$

en posant

$$T = \frac{n}{1}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)}{3}\cdots\frac{(n+m-2)}{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)}{x^n}.$$

Les termes qui suivent à droite, et ceux qui précèdent à gauche, sont respectivement

$$+\frac{T}{1-n}\cdot\frac{x}{m} - \frac{T}{2-n}\cdot\frac{x^2}{m(m+1)} + \frac{T}{3-n}\cdot\frac{x^3}{m(m+1)(m+2)} - \ldots;$$

$$+\frac{T}{-1-n}\cdot\frac{m-1}{x} - \frac{T}{-2-n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{x^2} + \frac{T}{-3-n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{x^3} - \ldots$$

Ces deux suites deviennent, à cause de $x = m = \infty$,

$$\frac{T}{1-n} - \frac{T}{2-n} + \frac{T}{3-n} - \ldots;$$

$$-\frac{T}{1+n} + \frac{T}{2+n} - \frac{T}{3+n} + \ldots;$$

On aura donc

$$\int\frac{e^{-x}dx}{x^n} = T\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1+n} + \dfrac{1}{2+n} - \dfrac{1}{3+n} + \ldots \\[2ex] \dfrac{1}{1-n} - \dfrac{1}{2-n} + \dfrac{1}{3-n} - \dfrac{1}{4-n} + \ldots\end{array}\right.$$

ou plus simplement

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{x^n} = T \cdot \int \frac{u^{n-1} + u^{-n}}{1+u} \cdot du;$$

en faisant $u=1$ après l'intégration, et $x=m=\infty$ dans la valeur de T. Soit $n=\frac{1}{2}$; on aura $T=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$2\int \frac{u^{-\frac{1}{2}}\,du}{1+u} = \pi$; partant $\int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}$. En faisant $x=t^2$, on aura $\int dt e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par la formule précédente on pourra toujours avoir la valeur approchée de l'intégrale $\int \frac{e^{-x}\,dx}{x^n}$; n étant une fraction quelconque.

Nous remarquerons ici, que l'intégrale $\int \frac{dx e^{-ax}}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, a, comme l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.ax}{x}$, la propriété de n'être point indépendante de a. M.r Mascheroni dans la première note de son ouvrage, insérée dans *le troisième volume du Calcul intégral de* M.r Lacroix, a trouvé que le second membre de l'équation

$$\int \frac{e^{-x}\,dx}{x} = 0{,}577215\ldots + \log.x - x + \frac{x^2}{1.2.2} - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.4} - \ldots\ldots$$

est nul lorsque $x=\infty$. En faisant directement le même

calcul sur l'intégrale $\int \frac{dx e^{-ax}}{x}$, on a

$$\int \frac{dx e^{-ax}}{x} = 0{,}577215\ldots + \log.a + \log.x - ax + \frac{a^2 x^2}{1.2.2} - \frac{a^3 x^3}{1.2.3.3} + \ldots$$

où le second membre est nul lorsque $x = \infty$: d'où l'on conclut depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{dx e^{-ax}}{x} = -\log.0 - \log.a - 0{,}577215\ldots = \infty;$$

$$\int \frac{dx(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a'.$$

ARTICLE DEUXIÈME.

---

21. Le procédé par lequel M.r Mascheroni a intégré les différentielles $\frac{dx.\sin.x}{x^n}$, $\frac{dx.\cos.x}{x^n}$ cesse d'être praticable, lorsque le dénominateur devient une fonction de la variable à plusieurs termes; ainsi, par exemple, la différentielle $\frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$ ne saurait être intégrée par ce procédé. M.r Laplace qui le premier en a donné l'intégrale définie depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, y est parvenu par des considérations si élevées, qu'elles ne peuvent se présenter qu'au petit nombre de Géomètres capables d'embrasser d'un coup d'œil tout le systême des mathématiques. Nous allons proposer ici une autre méthode, qui met en évidence l'origine de tous les termes qui composent l'intégrale, et montre les intégrales définies plus simples, desquelles dépend l'intégrale proposée,

On a, en développant $\frac{1}{m^2+x^2}$ en série descendante,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2} = \int dx.\cos.rx \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{m^2}{x^4} + \frac{m^4}{x^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{\cos.rx}{x} - r.\int \frac{dx \sin.rx}{x}$$

$$-m^2 \left\{ \frac{-\cos.rx}{3x^3} + \frac{r.\sin.rx}{3.2.x^2} + \frac{r^2\cos.rx}{3.2.1.x} + \frac{r^3}{3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right\} \qquad (1)$$

$$+ m^4 \left\{ \frac{-\cos.rx}{5x^5} + \frac{r.\sin.rx}{5.4.x^4} + \frac{r^2\cos.rx}{5.4.3.x^3} - \frac{r^3\sin.rx}{5.4.3.2.x^2} - \frac{r^4\cos.rx}{5.4.3.2.1.x} - \frac{r^5}{5.4.3.2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x} \right.$$

$$- \ldots$$

$$+ M;$$

Chaque ligne horizontale est l'intégrale des termes $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2}, -m^2\int \frac{dx.\cos.rx}{x^4}$, etc.; M est la constante arbitraire qui doit rendre nulle l'intégrale avec x. Pour la déterminer développons $\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$ d'une autre manière. Soit $x = \frac{1}{z}$, on aura, en mettant pour $\cos.\left(\frac{r}{z}\right)$ son développement,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2} = -\int \frac{dz.\cos.\left(\frac{r}{z}\right)}{1+m^2z^2} = \int \frac{dz}{1+m^2z^2}\left(-1 + \frac{r^2}{1.2.z^2} - \frac{r^4}{1.2.3.4.z^4} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{m}.\ \text{arc. tang. } mz$$

$$-\frac{r^2}{2z} - \frac{mr^2}{2}.\ \text{arc. tang. } mz$$

$$+ \frac{r^4}{3.2.3.4.z^3} - \frac{m^2r^4}{2.3.4\,z} - \frac{m^3r^4}{2.3.4.}\ \text{arc. tang. } mz$$

$$(2) \qquad - \frac{r^6}{5.2.3.4.5.6.z^5} + \frac{m^2r^6}{3.2.3.4.5.6.z^3} - \frac{m^4r^6}{2.3.4.5.6.z} - \frac{m^5r^6}{2.3.4.5.6.}\ \text{arc. tang.} mz$$

$$+ \ldots$$

$$+ N;$$

en notant qu'on a

$$\frac{1}{z^2(1+m^2z^2)}=\frac{1}{z^2}-\frac{m^2}{1+m^2z^2};$$

$$\frac{1}{z^4(1+m^2z^2)}=\frac{1}{z^4}-\frac{m^2}{z^2}+\frac{m^4}{1+m^2z^2};$$

etc.

N est la constante arbitraire, qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $z=\infty$. Maintenant nous remarquerons que si l'on met dans tous les termes du dernier membre de l'équation (1), au lieu des fonctions circulaires, leurs développemens en x, et qu'après cette substitution on intègre les termes affectés de l'intégrale $\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$; on aura une fonction de puissances ascendantes et descendantes de x, qui sera identique avec la fonction correspondante de $\frac{1}{z}$, qu'on obtiendra en mettant dans le dernier membre de l'équation (2) le développement en z de l'expression arc.tang.mz. Les équations (1) et (2), transformées comme on vient de dire, n'acquerront aucun terme constant par les substitutions indiquées: les constantes M et N resteront donc les mêmes. De là il suit que la valeur de la constante M, lorsque $x=0$, est la même que la valeur de N, lorsque $z=\infty$, en vertu de la supposition $x=\frac{1}{z}$: mais lorsque $z=\infty$, l'équation (2) donne, l'intégrale en z étant nulle à cette limite,

$$N=\frac{\pi}{2m}\left(1+\frac{m^2r^2}{1.2}+\frac{m^4r^4}{1.2.3.4}+\frac{m^6r^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right)=\frac{\pi}{2m}\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right);$$

On aura donc

$$M = N = \frac{\pi}{2m}\left(\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right);$$

Lorsque $x = \infty$, l'équation (1) donne

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2 + x^2} = M - \frac{1}{m}\left(mr + \frac{m^3r^3}{1.2.3.} + \frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5.} + \ldots\right).\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2m}\right) - \left(\frac{e^{mr} - e^{-mr}}{2m}\right).\int \frac{dx.\sin.rx}{x};$$

et puisque, lorsque $x = \infty$, on a $\int \frac{dx.\sin.rx}{x} = \frac{\pi}{2}$, on aura enfin

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr}.$$

22. On a de la même manière

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2 + x^2} = \int dx.\sin.rx\left(\frac{1}{x} - \frac{m^2}{x^3} + \frac{m^4}{x^5} - \ldots\right)$$

$$= \int \frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$+ \frac{m^2\sin.rx}{2x^2} + \frac{m^2r.\cos.rx}{2x} + \frac{m^2r^2}{2.1}\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$- \frac{m^4\sin.rx}{4x^4} - \frac{m^4r.\cos.rx}{4.3.x^3} + \frac{m^4r^2.\sin.rx}{4.3.2.x^2} + \frac{m^4r^3.\cos.rx}{4.3.2.1.x} + \frac{m^4r^4}{4.3.2.1.}\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ M;$

Pour déterminer M dans le cas de $x = 0$, soit $x = \frac{1}{z}$, on aura, en développant $\sin.\left(\frac{r}{z}\right)$,

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2 + x^2} = \int \frac{dz}{1 + m^2z^2}\left(-\frac{r}{z^2} + \frac{r^3}{1.2.3.z^4} - \frac{r^5}{1.2.3.4.5.z^6} + \ldots\right)$$

$$= -r.\left\{-\frac{1}{z} - m.\text{arc. tang.}\, mz\right\}$$

$$+ \frac{r^3}{1.2.3}.\left\{-\frac{1}{3z^3} + \frac{m^2}{z} + m^3\,\text{arc.tang.}mz\right\}$$

$$- \frac{r^5}{1.2.3.4.5}.\left\{-\frac{1}{5z^5} + \frac{m^2}{3z^3} - \frac{m^4}{z} - m^5\,\text{arc.tang.}mz\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ N:$$

Cette équation donne, lorsque $z = \infty$,

$$N = -\frac{\pi}{2}.\left\{mr + \frac{m^3r^3}{1.2.3} + \frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right\} = \frac{\pi}{2}.\left\{\frac{e^{-mr} - e^{mr}}{2}\right\} = M.$$

Lorsque $x = \infty$, la première équation devient

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2 + x^2} = M + \left\{\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right\}.\int \frac{dx.\sin.rx}{x} = M + \left\{\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right\}.\frac{\pi}{2};$$

donc enfin

$$\int \frac{xdx\sin.rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr}.$$

En faisant $m = 1$, on conclut le théorème de Mr Laplace,

$$\int \frac{dx.(\cos.rx + x.\sin.rx)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{e^r}.$$

Par le même procédé on trouve

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x(m^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2m^2}\left\{1 - \frac{1}{e^{mr}}\right\}.$$

Nous avons tiré ces exemples du mémoire de Mr Laplace *sur les fonctions génératrices, les intégrales définies, etc. Paris, septembre* 1811. Pour connaître

les intégrales, qu'on déduit de $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, on peut consulter ce Mémoire, ainsi que le *n.° 43 du nouveau Bulletin de la Société philomatique*, et l'ouvrage de Mr LEGENDRE intitulé *Exercices de Calcul intégral, Paris,* 1811. Nous remarquerons que cette intégrale dépend elle-même de $\int \frac{dx.\sin.rx}{x}$, et de $\int \frac{dx}{1+m^2x^2}$, ainsi qu'on a pu le voir.

Aux intégrales indiquées par ces Géomètres on peut joindre les suivantes, $\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{m^2+x^2}$, $\int \frac{xdx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{m^2+x^2}$, qui peuvent se développer, lorsque p et q sont des nombres entiers positifs, en un nombre fini de termes de la forme $\int \frac{dx.\cos.rx}{m^2+x^2}$, $\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2+x^2}$: Ainsi l'on a (n.° 19) depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

lorsque $r>r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8m}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2m(r+r')} + e^{-2mr'} - \frac{1}{2}e^{-2m(r-r')} - e^{-2mr} + 1\right\}$;

$$r=r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.rx}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{16m}\left\{1-e^{-4mr}\right\};$$

$$r<r' \ldots \int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{8m}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2m(r+r')} + e^{-2mr'} - \frac{1}{2}e^{-2m(r'-r)} - e^{-2mr} + 1\right\}.$$

$$r > 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2} e^{-m(r+2r')} + e^{-m(r-2r')} + e^{-mr} \right\};$$

$$r = 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{2} e^{-3mr} + e^{-mr} \right\};$$

$$r < 2r' \ldots \int \frac{x\,dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2} e^{-m(r+2r')} - e^{-m(2r'-r)} + e^{-mr} \right\}.$$

23. Passons à l'intégrale $\int dx.e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}$ prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$ (M.r Laplace, *n.*° 43 *et* M.r Poisson, *n.*° 50 *du nouveau Bulletin de la Société philomatique*).

En développant $e^{-\frac{a^2}{x^2}}$ on a

$$\int dxe^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} = \int dxe^{-x^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^4}{1.2.x^4} - \frac{a^6}{1.2.3.x^6} + \ldots \right\}$$

$$= \int dxe^{-x^2}$$

$$- \frac{a^2}{1} \cdot \left\{ - \frac{e^{-x^2}}{x} - 2 \int e^{-x^2}\, dx \right\}$$

$$+\frac{a^4}{1.2.}\left\{-\frac{e^{-x^2}}{3x^3}+\frac{2e^{-x^2}}{3x}+\frac{2^2}{3.1}\int e^{-x^2}dx\right\}$$

$$-\frac{a^6}{1.2.3}\left\{-\frac{e^{-x^2}}{5x^5}+\frac{2e^{-x^2}}{5.3.x^3}-\frac{2^2e^{-x^2}}{5.3.1.x}-\frac{2^3}{5.3.1}\int e^{-x^2}dx\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ M;$

Pour déterminer M, lorsque l'intégrale est nulle avec x, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{z^2}}$,

$$\int dxe^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}=\int\frac{dz}{z^2}-e^{-a^2z^2}\left\{-1+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{1.2.z^4}+\frac{1}{1.2.3.z^6}-\ldots\right\}$$

$$=-1.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{z}-2a^2\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{1}.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{3z^3}+\frac{2a^2e^{-a^2z^2}}{3z}+\frac{2^2a^4}{1.3.}\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.}.\left\{-\frac{e^{-a^2z^2}}{5z^5}+\frac{2a^2e^{-a^2z^2}}{3.5z^3}-\frac{2^2a^4e^{-a^2z^2}}{1.3.5.z}-\frac{2^3a^6}{1.3.5}\int dze^{-a^2z^2}\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ N;$

Cette équation donne, lorsque $z=\infty$, en notant que dans ce cas on a $\int e^{-a^2z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$,

$$N=\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\left\{2a+\frac{2^2a^3}{3}+\frac{2^3}{1.2.}\cdot\frac{a^5}{3.5}+\frac{2^4}{1.2.3}\cdot\frac{a^7}{3.5.7}+\ldots\right\}=M.$$

Lorsque $x=\infty$, la première équation donne, en y mettant pour M cette valeur,

$$\int dx e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{ 1 + \frac{2a^2}{1} + \frac{2^2}{1.2}\cdot\frac{a^4}{3} + \frac{2^3}{1.2.3}\cdot\frac{a^6}{5.3} + \frac{2^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^7}{7.5.3} + \ldots - 2a - \frac{2^2}{1}\cdot\frac{a^3}{3} - \frac{2^3}{1.2}\cdot\frac{a^5}{5.3} - \frac{2^4}{1.2.3}\cdot\frac{a^7}{7.5.3} - \ldots \right\};$$

Multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque terme du second membre autant de fois par 2, pour que ce nombre soit élevé à la même puissance que a, l'intégrale précédente se réduira à

$$\int dx.e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2a}.$$

24. Soit encore $\int x^{-\frac{1}{2}} dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{2nx}}$,

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx.e^{-\frac{x}{2n}}\left\{1 - \frac{1}{2nx} + \frac{1}{1.2.(2nx)^2} - \frac{1}{1.2.3.(2nx)^3} + \ldots\right\}$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx.e^{-\frac{x}{2n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{2n}\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2(2n)^2}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{3x^{\frac{3}{2}}}+\frac{2^2e^{-\frac{x}{2n}}}{3.2nx^{\frac{1}{2}}}+\frac{2^2}{3.(2n)^2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx\,e^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.3.(2n)^3}\left\{-\frac{2e^{-\frac{x}{2n}}}{5x^{\frac{5}{2}}}+\frac{2^2e^{-\frac{x}{2n}}}{5.3.2n.x^{\frac{3}{2}}}-\frac{2^3e^{-\frac{x}{2n}}}{5.3.1.(2n)^2x^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{2^3}{5.3.1.(2n)^3}\int x^{-\frac{1}{2}}dx\,e^{-\frac{x}{2n}}\right\}$$

$+$ . . . .

$+ M$;

Pour déterminer M, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $e^{-\frac{1}{2nz}}$,

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\frac{x}{2n}}.e^{-\frac{1}{2nx}}=-\int z^{-\frac{3}{2}}.e^{-\frac{1}{2nz}}.e^{-\frac{z}{2n}}.dz=$$

$$\int z^{-\frac{3}{2}}.dz.e^{-\frac{z}{2n}}\left\{-1+\frac{1}{2nz}-\frac{1}{1.2.(2nz)^2}+\frac{1}{1.2.3.(2nz)^3}-\ldots\right\}$$

$$= -1\left\{-\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{2n}\int z^{-\frac{1}{2}}dze^{-\frac{z}{2n}}\right\}$$

$$+\frac{1}{2n}\left\{-\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{3z^{\frac{3}{2}}} + \frac{2^2 e^{-\frac{z}{2n}}}{3.1.2n.z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2^2}{3.1.(2n)^2}\int e^{-\frac{1}{2}}dze^{-\frac{z}{2n}}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2(2n)^2}\left\{-\frac{2e^{-\frac{z}{2n}}}{5.z^{\frac{5}{2}}} + \frac{2^2 e^{-\frac{z}{2n}}}{5.3.2nz^{\frac{3}{2}}} - \frac{2^3 e^{-\frac{z}{2n}}}{5.3.1(2n)^2 z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2^3}{5.3.1.(2n)^3}\int z^{-\frac{1}{2}}dze^{\frac{-z}{2n}}\right\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ N$;

en faisant $z = \infty$, et observant que dans ce cas on a

$\int z^{-\frac{1}{2}}dze^{-\frac{z}{2n}} = \sqrt{2n.\pi}$, cette équation donne

$$N = -\sqrt{2n\pi}\left\{\frac{2}{2n} + \frac{2^2}{1}\cdot\frac{1}{3.(2n)^3} + \frac{2^3}{1.2.}\cdot\frac{1}{5.3.(2n)^5} + \frac{2^4}{1.2.3.}\cdot\frac{1}{7.5.3.(2n)^7} + \ldots\right\} = M.$$

Lorsque $x = \infty$, on a par la première équation, en y mettant cette valeur de M,

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx\, e^{-\left(\frac{2nx}{1+x^2}\right)} = \sqrt{2n\pi}\left\{1 - \frac{2}{2n} + \frac{2^2}{1.2.(2n)^2} - \frac{2^3}{1.2.3.(2n)^3} + \ldots\right\}$$

$$= \sqrt{2n\pi}.\, e^{-\frac{1}{n}}.$$

Par le même procédé on trouverait la valeur de l'intégrale $\int x^{\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, en la faisant dépendre de l'intégrale connue $\int x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, à laquelle se reduit en général l'intégration de la différentielle $x^{\frac{2k-1}{2}} dx.\, e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)}$, k étant un nombre entier quelconque. (*Voyez l'ouvrage cité de M.r* LEGENDRE, *pag.* 364). Au reste on peut remarquer, que les deux intégrales $\int dx\, e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}$, $\int x^{-\frac{1}{2}} dx\, e^{-\left\{\frac{1+x^2}{2nx}\right\}}$ se reduisent l'une à l'autre par un simple changement des variables.

25. Les intégrales rapportées dans cet article, et celles qu'on en déduit par la différentiation, ou qui s'y rapportent par la décomposition du dénominateur en facteurs, dépendent visiblement des intégrales $\int \frac{dx.\sin.x}{x}$, $\int dx..e^{-x^2}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$. Les deux développemens dont nous nous sommes servis, en ramènent l'intégration aux procédés ordinaires, et mettent en évidence la formation des coëfficiens numériques qui affectent les transcendantes circulaires.

On peut appliquer ce procédé à la recherche des

valeurs d'autres intégrales définies, mais on aura en général des series, qu'il ne sera pas possible de ramener à des expressions connues en termes finis. Nous nous bornerons aux deux exemples suivans: On trouve par les développemens du n.° 21., ces intégrales, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$;

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{(m+nx)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{mn}} \cdot \cos. \frac{mr}{n} - \frac{1}{m} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left\{ \frac{2mr}{n} - \frac{2^2 m^2 r^2}{1.3.n^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2^3.m^3.r^3}{1.3.5.n^3} + \frac{2^4.m^4.r^4}{1.3.5.7n^4} + \ldots \right\};$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{(m+nx)\sqrt{x}} = -\frac{\pi}{\sqrt{mn}} \cdot \sin. \frac{mr}{n} + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \left\{ \frac{2mr}{n} + \frac{2^2 m^2 r^2}{1.3.n^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2^3 m^3 r^3}{1.3.5.n^3} - \frac{2^4 m^4 r^4}{1.3.5.7.n^4} + \ldots \right\};$$

où l'on voit, que les coëfficiens numériques du terme $\frac{\pi}{\sqrt{mn}}$, qui provient de la différentielle $\frac{dx}{(m+nx)\sqrt{x}}$, sont $\cos. \frac{mr}{n}$, $\sin. \frac{mr}{n}$; mais les coëfficiens qui affectent le terme $\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$, dû à la différentielle $\frac{dx.\frac{\sin.rx}{\cos.rx}}{\sqrt{x}}$, ne paraissent pas de nature à être exprimés en termes finis.

26. La méthode exposée au n.° 21 peut être généralisée de la manière suivante. Considérons l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$; en développant $\frac{1}{x+m}$ en puissances descendantes de la variable, et intégrant, on a

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x+m}=\int dx.\sin.rx\left\{\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}+\frac{m^2}{x^3}-\ldots\right\}$$

$$=\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$$

$$-m.\left\{-\frac{\sin.rx}{x}+r.\int\frac{dx.\cos.rx}{x}\right\}$$

$$(1)\qquad +m^2.\left\{-\frac{\sin.rx}{2x^2}-\frac{r.\cos.rx}{x}-\frac{r^2}{2.1}\int\frac{dx.\sin.rx}{x}\right\}$$

$$-m^3.\left\{-\frac{\sin.rx}{3x^3}-\frac{r.\cos.rx}{3.2.x^2}+\frac{r^2\sin.rx}{3.2.1.x}-\frac{r^3}{3.2.1}\int\frac{dx\cos.rx}{x}\right\}$$

$$+m^4.\left\{-\frac{\sin.rx}{4x^4}-\frac{r\cos.rx}{4.3.x^3}+\frac{r^2\sin.rx}{4.3.2.x^2}+\frac{r^3\cos.rx}{4.3.2.1.x}+\frac{r^4}{4.3.2.1}\int\frac{dx.\sin.rx}{x}\right\}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+M;$$

M étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale avec x. Soit $x=\frac{1}{z}$, on aura, en développant $\sin.\frac{r}{z}$ et intégrant,

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x+m}=-\int\frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{z+mz^2}=\int\frac{dz}{1+mz}\left\{-\frac{r}{z^2}+\frac{r^3}{1.2.3.z^4}-\ldots\right\}$$

$$=-r\left\{-\frac{1}{z}-m.\log.z+m.\log.(1+mz)\right\}$$

$$(2)\qquad +\frac{r^3}{1.2.3}\left\{-\frac{1}{3z^3}+\frac{m}{2z^2}-\frac{m^2}{z}-m^3.\log.z+m^3.\log.(1+mz)\right\}$$

$$-\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\left\{-\frac{1}{5z^5}+\frac{m}{4z^4}-\frac{m^2}{3z^3}+\frac{m^3}{2z^2}-\frac{m^4}{z}\right.$$

$$\left.-m^5\log.z+m^5\log.(1+mz)\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+N;$$

N étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $z=\infty$.

Maintenant j'observe que si dans le dernier membre de l'équation (1) on met pour $\sin.rx$ et pour $\cos.rx$, leurs développemens en x, et qu'on intègre, après cette substitution, les termes $\int\frac{dx.\sin.rx}{x}$, $\int\frac{dx.\cos.rx}{x}$; Ce dernier membre deviendra une fonction de puissances ascendantes et descendantes de x, avec une suite de termes constans, devenus apparens en vertu de cette substitution. Pareillement si l'on développe les termes $\log.(1+mz)$ dans l'équation (2), le dernier membre de cette équation deviendra une fonction de puissances ascendantes et descendantes de z: Or ces deux fonctions de x et de z doivent être identiques; Il suit donc que les termes indépendans de x dans l'équation (1), transformée comme on vient de dire, doivent être égaux aux termes indépendans de z dans l'équation (2). On aura ainsi

$$M+mr-\frac{m^3r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots\ldots=N;$$

mais lorsque $z=\infty$, l'équation (2) donne

$$N=\sin.mr.\log.m;$$

partant

$$M = \sin.mr.\log.m - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$
$$- \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots$$

Telle est donc la valeur de la constante M, pour que le dernier membre de l'équation (1) soit nul avec x. Lorsque $x = \infty$, cette équation donne, en observant que dans ce cas on a (n.° 6)

$$\int \frac{dx\,\sin.rx}{x} = \frac{\pi}{2};\ \int \frac{dx.\cos rx}{x} = -\mathrm{A} - \log.r;$$

$$(\mathrm{P})\ \int \frac{dx\,\sin rx}{x+m} = \frac{\pi}{2}\cdot\cos.mr + (\mathrm{A} + \log.mr)\sin.mr$$
$$- mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$
$$- \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots$$

On trouve de la même manière, et entre les mêmes limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$(\mathrm{Q})\ \int \frac{dx.\cos rx}{x+m} = \frac{\pi}{2}.\sin.mr - (\mathrm{A} + \log.mr)\cos.mr - \frac{m^2 r^2}{1.2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$
$$- \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots$$

En faisant attention que l'on a

$$\frac{1}{m^2 + x^2} = \frac{1}{2m\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x - m\sqrt{-1}} - \frac{1}{2m\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x + m\sqrt{-1}},$$

on trouve par l'équation (P) entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}\left\{mr + \frac{m^3r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\right\}$$

$$-\left(\frac{e^{mr}-e^{-mr}}{2m}\right)\left(A+\log.mr\right);$$

et par l'équation (Q),

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = -\frac{\pi}{2m}\sin mr\sqrt{-1} - \frac{\cos.mr\sqrt{-1}}{2m}.\frac{\log.(-1)}{\sqrt{-1}};$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr}.$$

On trouve pareillement

$$\int \frac{xdx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{m^2r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{m^4r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots..$$

$$-\left(\frac{e^{mr}+e^{-mr}}{2}\right)\left(A+\log.mr\right).$$

27. Les intégrales précédentes peuvent être mises sous une autre forme de la manière suivante : Soit $x+m=u$, on aura

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} = \cos.mr.\int \frac{du.\sin.ru}{u} - \sin.mr.\int \frac{du.\cos.ru}{u};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m} = \cos.mr.\int \frac{du.\cos.ru}{u} + \sin.mr.\int \frac{du.\sin.ru}{u};$$

les limites relatives à la variable u sont $u=m$, $u=\infty$: En développant $\sin.ru$, $\cos.ru$, et intégrant on a

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} = \cos.mr.\left\{\frac{\pi}{2} - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} - \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + ..\right\}$$

$$-\sin.mr\left\{-A - \log.mr + \frac{m^2 r^2}{1.2.2} - \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\};$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m} = \cos.mr.\left\{-A - \log.mr + \frac{m^2 r^2}{1.2.2} - \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\}$$

$$+\sin.mr.\left\{\frac{\pi}{2} - mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} - \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right\};$$

en notant que lorsque $u = \infty$, on a (n.os 2 et 6)

$$ru - \frac{r^3 u^3}{1.2.3.3} + \frac{r^5 u^5}{1.2.3.4.5.5} - \ldots = \frac{\pi}{2};$$

$$\log.u - \frac{r^2 u^2}{1.2.2} + \frac{r^4 u^4}{1.2.3.4.4} - \ldots = -A - \log.r.$$

On tire de là

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \left(\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2m}\right)\left(mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr} - e^{-mr}}{2m}\right)\left(\frac{m^2 r^2}{1.2.2} + \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr} - e^{-mr}}{2m}\right)\left(A + \log.mr\right);$$

$$\int \frac{xdx.\cos rx}{x^2+m^2} = \left(\frac{e^{mr} - e^{-mr}}{2}\right)\left(mr + \frac{m^3 r^3}{1.2.3.3} + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5.5} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right)\left(\frac{m^2 r^2}{1.2.2} + \frac{m^4 r^4}{1.2.3.4.4} + \frac{m^6 r^6}{1.2.3.4.5.6.6} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{e^{mr} + e^{-mr}}{2}\right)\left(A + \log.mr\right).$$

En comparant ces diverses expressions avec leurs correspondantes dans le n.° précédent, et en écrivant r au lieu de mr, on a les équations suivantes, vraies par identité :

$$r-\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\sin.r.\left\{\frac{r^2}{1.2.2}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}-\ldots\ldots\right\}$$

$$+\cos.r.\left\{r-\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}-\ldots\ldots\ldots\right\};$$

$$\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots\ldots$$

$$=\sin.r.\left\{r-\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}-\ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$-\cos.r.\left\{\frac{r^2}{1.2.2}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}-\ldots\ldots\right\};$$

$$r+\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

$$=\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)\left\{r+\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}+\ldots\ldots\right\}$$

$$-\left(\frac{e^r-e^{-r}}{2}\right)\left\{\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}-\ldots\right\};$$

$$\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots.$$
$$=\left(\frac{e^r-e^{-r}}{2}\right)\left(r+\frac{r^3}{1.2.3.3}+\frac{r^5}{1.2.3.4.5.5}+\ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)\left(\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\frac{r^6}{1.2.3.4.5.6.6}+\ldots\right);$$

$$r+\frac{r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots$$
$$=e^r\left\{r-\frac{r^2}{1.2.2}+\frac{r^3}{1.2.3.3}-\frac{r^4}{1.2.3.4.4}+\ldots\right\}.$$

28. Si dans les équations (P) et (Q) on fait m négative, les intégrales se présentent sous forme imaginaire. Pour éviter cet inconvénient, intégrons la différentielle $\frac{dx.\sin.rx}{x-m}$ en deux parties ; premièrement depuis $x=0$ jusqu'à $x=m$; ensuite depuis $x=m$ jusqu'à $x=\infty$. Pour avoir la première partie, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x-m}=\int\frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{(mz-1)z}.$$

cette dernière intégrale ayant pour limites $z=\infty$, $z=\frac{1}{m}$. Développant $\sin.\frac{r}{z}$ et intégrant, on a

$$\int \frac{dz.\sin.\frac{r}{z}}{(mz-1)z} = \int \frac{dz}{mz-1} \left\{ \frac{r}{z^2} - \frac{r^3}{1.2.3.z^4} + \frac{r^5}{1.2.3.4.5.z^6} - \ldots \right\}$$

$$= r \left\{ \frac{1}{z} + m \log \left(m - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

$$- \frac{r^3}{1.2.3} \left\{ \frac{1}{3z^3} + \frac{m}{2z^2} + \frac{m^2}{z} + m^3 \log. \left(m - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

$$+ \frac{r^5}{1.2.3.4.5} \left\{ \frac{1}{5z^5} + \frac{m}{4z^4} + \frac{m^2}{3z^3} + \frac{m^3}{2z^2} + \frac{m^4}{z} + m^5 \log. \left(m - \frac{1}{z} \right) \right\}$$

— . . . .

+ Const. ;

lorsque $z = \infty$, cette équation donne

$$\text{Const.} = - \sin.mr.\log.m\,;$$

On a donc depuis $z = \infty$ jusqu'à $z = \frac{1}{m}$, ou bien depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \sin.mr.\log.0 - \sin.mr.\log.m + mr$$

$$- \frac{m^3 r^3}{1.2.3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{m^5 r^5}{1.2.3.4.5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \ldots$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m}$ depuis $x = m$ jusqu'à $x = \infty$, soit $x - m = u$, on aura

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \sin.mr \,.\int \frac{du.\cos.ru}{u} + \cos.mr \,.\int \frac{du.\sin.ru}{u}\,;$$

les limites par rapport à u étant $u=0$, $u=\infty$, le second membre de cette équation est connu, par ce qui précède. On aura ainsi depuis $x=m$, jusqu'à $x=\infty$,

$$\int\frac{dx.\sin.rx}{x-m}=-\left(\text{A}+\log.0+\log.r\right).\sin.mr+\frac{\pi}{2}.\cos.mr.$$

En réunissant ces deux parties, il résulte entre $x=0$ et $x=\infty$,

$$(\text{R})\int\frac{dx.\sin.rx}{x-m}=\frac{\pi}{2}.\cos.mr-\left(\text{A}+\log.mr\right).\sin.mr$$
$$+mr-\frac{m^3r^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{m^5r^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots$$

Par le même procédé, et entre les mêmes limites, on trouve

$$(\text{S})\int\frac{dx.\cos.rx}{x-m}=-\frac{\pi}{2}.\sin.mr-\left(\text{A}+\log.mr\right)\sin.mr$$
$$-\frac{m^2r^2}{1.2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{m^4r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots$$

29. En additionnant les équations (P) et (R), on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$(1)\qquad\int\frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2}=\frac{\pi}{2}.\cos.mr:$$

En soustrayant l'équation (Q) de l'équation (S), on a entre les mêmes limites,

$$(2)\qquad\int\frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2}=-\frac{\pi.\sin.mr}{2m}.$$

Si pour avoir la valeur de ces intégrales, nous nous servons des équations (P) et (Q), en y changeant m en $-m$, lorsque le dénominateur $x+m$ devient $x-m$, nous aurons

$$\int \frac{xdx \sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} + \frac{1}{2}\int \frac{dx \sin.rx}{x+m}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot \cos.mr - \frac{\log.(-1)}{2}\cdot \sin.mr;$$

expression qui devient, en passant des fonctions circulaires aux exponentielles,

(3) $$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr.\sqrt{-1}}.$$

On trouve de la même manière, par l'équation (Q),

(4) $$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2m\sqrt{-1}}.e^{-mr.\sqrt{-1}}.$$

Il est remarquable, que si dans les intégrales

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr},$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr},$$

on écrit $m\sqrt{-1}$ au lieu de m, on tombe sur les expressions (3) et (4). En mettant les intégrales $\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$ sous cette forme

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2}.\left\{\cos.mr\sqrt{-1} + \sqrt{-1}.\sin.mr\sqrt{-1}\right\};$$

$$\int \frac{dx.\cos rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.\left\{\cos.mr\sqrt{-1} + \sqrt{-1}.\sin.mr\sqrt{-1}\right\};$$

on voit que lorsque m devient $m\sqrt{-1}$, on ne doit prendre que la partie réelle de ces expressions.

30. Nous ferons ici quelques remarques, qui paraissent de la plus grande importance dans l'usage des valeurs des intégrales définies : c'est que ces valeurs peuvent ne pas être exactes pour certaines valeurs particulières des constantes, dont ces intégrales sont fonctions ; et que les divers procédés qu'on peut employer pour arriver à la valeur des intégrales définies, ne sont pas également propres pour donner tous les termes qui doivent former l'intégrale définie pour ces valeurs particulières des constantes.

Nous avons vu (n.° 8) que l'on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2} = \infty - \frac{\pi r}{2}.$$

Si nous faisons $m=0$ dans l'intégrale

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-mr};$$

nous aurons

$$\int \frac{dx.\cos rx}{x^2} = \frac{\pi}{2.0} = \infty,$$

valeur qui n'est point identique avec la véritable $\frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2}$.

Si, pour arriver à la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx\cos rx}{x^2}$ nous considérons la double intégrale $\iint 2y\,dy\,e^{-x^2 y^2}.\cos.rx$,

nous trouverons, en suivant le procédé de M.r LAPLACE, (*Mémoire cité au n.° 22.*)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{0} - \frac{r\pi}{2},$$

expression qui est plus près de la véritable que celle-ci $\frac{\pi}{2.0}$; mais qui n'est pas identique avec elle.

En faisant $m=0$ dans les deux équations du n.° 21, par lesquelles nous avons trouvé la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2}$, ces équations deviennent

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\frac{\cos.rx}{x} - r.\int \frac{dx.\sin.rx}{x} + M;$$

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\int dz.\cos.\frac{r}{z}$$

$$= -z - \frac{r^2}{2z} + \frac{r^4}{3}.\frac{1}{2.3.4.z^3} - \frac{r^6}{5}.\frac{1}{2.3.4.5.6.z^5} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + N;$$

où $z = \frac{1}{x}$: Lorsque $z = \infty$, on a

$$N = z = \frac{1}{0} = M;$$

ainsi la première équation donne, lorsque $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2},$$

résultat qui est exact.

En faisant $m=0$ dans l'équation (nº 29)

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi}{2m} \cdot \sin.mr,$$

on a

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = -\frac{r\pi}{2},$$

valeur inexacte, qui provient de la manière dont nous avons déduit la valeur de l'intégrale $\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2 - m^2}$; car lorsque $m=0$, les deux équations (Q) et (S) sont identiques, et l'opération de soustraire l'une de l'autre ne peut conduire à rien : mais si l'on met dans l'équation (Q) $m+\omega$ au lieu de m, ω étant une très-petite quantité, dont on néglige les puissances supérieures à la première, on arrivera, en soustrayant l'équation (Q) de l'équation (S), à cette équation

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{(x-m)(x+m+\omega)} = \frac{1}{2m+\omega}\left\{\left(\frac{1}{m} - \frac{\pi r}{2}\right)\omega.\cos mr - \pi.\sin mr - (A+\log.mr)\,\omega.r.\sin.mr\right\};$$

En y faisant $m=0$, et, après les réductions auxquelles cette valeur donne lieu, faisant aussi $\omega=0$, on aura

$$\int \frac{dx\cos rx}{x^2} = \frac{1}{m} - \frac{\pi r}{2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi r}{2}.$$

31. A l'aide des valeurs des intégrales $\int\frac{dx.\cos rx}{x^2-m^2}$, $\int\frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2}$, on peut trouver celles des intégrales

$$\int\frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2-m^2},\ \int\frac{xdx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2-m^2},$$

p et q étant des nombres entiers positifs (n° 22). Mais on doit observer que la première de ces intégrales peut conduire à l'intégrale $\int\frac{dx}{x^2-m^2}$, qui, prise à la manière ordinaire, donnerait, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, un résultat imaginaire, ce qui porterait à conclure que l'intégrale $\int\frac{dx.\overline{\sin.r}^{2p}\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2-m^2}$ est imaginaire entre ces limites, tandis qu'elle est réelle. Pour éviter cet inconvénient, on intégrera la différentielle $\frac{dx}{x^2-m^2}$ en deux parties, premièrement depuis $x=0$ jusqu'à $x=m$; ensuite depuis $x=m$ jusqu'à $x=\infty$. Pour avoir la première partie, donnons à l'intégrale cette forme

$$\int\frac{dx}{x^2-m^2}=\frac{1}{2m}.\log.\left(m-x\right)-\frac{1}{2m}\log.\left(m+x\right)+\text{Const.}$$

cette équation donne, entre les limites $x=0$, $x=m$,

$$\int\frac{dx}{x^2-m^2}=\frac{1}{2m}.\log.0-\frac{1}{2m}.\log.2m.$$

Pour avoir la seconde partie mettons l'intégrale sous cette autre forme

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = \frac{1}{2m} . \log.\left(x-m\right) - \frac{1}{2m} . \log.\left(m+x\right) + \text{Const.},$$

d'où l'on tire, depuis $x=m$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = -\frac{1}{2m} \log.0 + \frac{1}{2m} . \log.2m .$$

Ainsi l'on a entre les limites $x=0$, $x=\infty$

$$\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = 0 .$$

D'après cela on trouvera, par exemple,

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.r'x}^2}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi}{4m} . \sin.2mr' ;$$

etc.

32. On a (n.° 28) entre les limites $x=m$, $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \frac{\pi}{2} . \cos.mr - (\text{A} + \log.r + \log.0) \sin.mr ;$$

on trouve de la même manière, depuis $x=m$ jusqu'à $x=-\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = -\frac{\pi}{2} . \cos.mr - (\text{A} + \log.r + \log.0) \sin.mr ;$$

d'où l'on conclut depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$,

$$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \pi \cos.mr = \int \frac{dx.\sin.rx}{x+m} .$$

On a pareillement entre les mêmes limites

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x-m} = -\pi . \sin.mr = -\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m} .$$

Le procédé du n.° 26 peut servir pour avoir le développement en série d'autres intégrales, telles que $\int \frac{dx.\sin rx}{(x+m)^2}$, $\int \frac{dx.\cos.rx}{(x+m)^2}$, etc. Nous nous bornerons ici à faire connaître l'avantage qu'il offre pour donner d'une manière plus rapide, que par les méthodes ordinaires, la valeur approchée de quelques séries divergentes.

33. On a

$$\int \frac{e^{-az}dz}{1+z^2} = \int e^{-az}dz \left\{1 - z^2 + z^4 - \ldots\right\}$$

$$= -e^{-az}.\frac{1}{a}$$

$$+ e^{-az}\left\{\frac{z^2}{a} + \frac{2z}{a^2} + \frac{2.1}{a^3}\right\}$$

$$-e^{-az}\left\{\frac{z^4}{a} + \frac{4z^3}{a^2} + \frac{4.3.z^2}{a^3} + \frac{4.3.2.z}{a^4} + \frac{4.3.2.1}{a^5}\right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.};$$

d'où l'on conclut depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$,

$$\int \frac{dze^{-az}}{1+z^2} = \frac{1}{a} - \frac{1.2}{a^3} + \frac{1.2.3.4}{a^5} - \frac{1.2.3.4.5.6}{a^7} + \ldots\ldots$$

On trouve, entre les mêmes limites,

$$\int \frac{zdze^{-az}}{1+z^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1.2.3}{a^4} + \frac{1.2.3.4.5}{a^6} - \ldots$$

Pour avoir la valeur approchée de ces suites, intégrons de la manière suivante :

$$\int \frac{dze^{-az}}{1+z^2} = \int dze^{-az} \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{e^{-az}}{z} - a \int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$(1) \qquad + \frac{e^{-az}}{3z^3} - \frac{ae^{-az}}{3.2.z^2} + \frac{a^2\, e^{-az}}{3.2.1.z} + \frac{a^3}{3.2.1} \int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$- \frac{e^{-az}}{5z^5} + \frac{ae^{-az}}{5.4.z^4} - \frac{a^2\, e^{-az}}{5.4.3.z^3} + \frac{a^3\, e^{-az}}{5.4.3.2.z^2} - \frac{a^4\, e^{-az}}{5.4.3.2.1.z}$$

$$- \frac{a^5}{5.4.3.2.1} \int \frac{dze^{-az}}{z}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ M;$$

M étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale avec z. Pour la déterminer, faisons $z = \frac{1}{x}$, et développons $e^{-\frac{a}{x}}$, nous aurons

$$\int \frac{e^{-az}\, dz}{1+z^2} = -\int \frac{e^{-\frac{a}{x}}\, dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \left\{ -1 + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{1.2.x^2} + \ldots \right\}$$

$$= -\text{arc.tang}\, x$$

$$+ a \left\{ \log.x - \frac{1}{2} \log.(1+x^2) \right\}$$

$$(2) \qquad - \frac{a^2}{1.2} \left\{ -\frac{1}{x} - \text{arc.tang}.\, x \right\}$$

$$+ \frac{a^3}{1.2.3} \left\{ -\frac{1}{2x^2} - \log.x + \frac{1}{2} \log.(1+x^2) \right\}$$

$$-\frac{a^4}{1.2.3.4}\left\{-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\text{arc.tang}.x\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+N;$$

N étant la constante qui doit rendre nulle l'intégrale, lorsque $x=\infty$. Les termes indépendans de z dans l'équation (1) sont

$$M+a-\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\ldots\ldots$$

Les termes indépendans de x dans l'équation (2) sont N. On aura donc (n.° 26)

$$M=N-a+\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

Lorsque $x=\infty$, l'équation (2) donne

$$N=\frac{\pi}{2}.\cos.a;$$

partant

$$M=\frac{\pi}{2}.\cos.a-a+\frac{a^3}{1.2.3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$$

c'est la valeur de la constante M pour que le dernier membre de l'équation (1) soit nul avec z: lorsque $z=\infty$, cette équation donne, en notant que l'on a dans ce cas (n.° 20) $\int\frac{e^{-az}\,dz}{z}=-\text{A}-\log.a$,

$$\int \frac{dz e^{-az}}{1+z^2} = (\mathrm{A} + \log.a)\sin.a + \frac{\pi}{2}\cos.a$$
$$-a + \frac{a^3}{1.2.3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{a^5}{1.2.3.4.5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

expression qui peut être mise sous cette forme (n.° 27)

$$\int \frac{dz e^{-az}}{1+z^2} = (\mathrm{A} + \log.a)\sin.a + \frac{\pi}{2}.\cos.a$$
$$-\sin.a.\left\{\frac{a^2}{1.2.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\}$$
$$-\cos.a.\left\{a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\right\}.$$

On aura de la même manière

$$\int \frac{z dz e^{-az}}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}.\sin.a - (\mathrm{A} + \log.a)\sin.a$$
$$+\cos.a\left\{\frac{a^2}{1.2.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4.4} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots.\right\}$$
$$-\sin.a\left\{a - \frac{a^3}{1.2.3.3} + \frac{a^3}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\right\}.$$

Soit $a=1=$ au rayon R du cercle, on aura

$$1 - 1.2 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5.6 + \ldots..$$
$$= \frac{\pi}{2}.\cos.R + \mathrm{A}.\sin.R$$
$$-\sin.R\left\{\frac{1}{1.2.2} - \frac{1}{1.2.3.4.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6} - \ldots\right\}$$
$$-\cos.R\left\{1 - \frac{1}{1.2.3.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\right\};$$

$$1 - 1.2.3 + 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5.6.7 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} . \sin.R - \mathrm{A}.\sin.R$$

$$+ \cos.R . \left\{\frac{1}{1.2.2} - \frac{1}{1.2.3.4.4} + \frac{1}{1.2.34.5.6.6} - \ldots\right\}$$

$$- \sin.R . \left\{1 - \frac{1}{1.2\,3.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.5} - \ldots\ldots\ldots\right\}.$$

En poussant l'aproximation jusqu'au douzième cifre décimal significatif, on trouve pour les limites des séries précédentes

$$1 - 1.2 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5.6 + \ldots = 0{,}621\,449\,624\,236;$$

$$1 - 1.2.3 + 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5.6.7 + \ldots = 0{,}343\,279\,002\,556;$$

en rapportant ici la valeur connue de la suite

$$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \ldots = 0{,}403\,652\,637\,676\ldots\ldots$$

(*Calcul intégral de* M.r Lacroix, *Tom.* 3, *pag.* 481) on aura les limites de trois suites divergentes, remarquables par l'analogie qu'elles ont avec les développemens du cosinus, du sinus et de l'exponentielle e^{-x}.

ARTICLE TROISIÈME

34. Nous allons présenter dans cet article quelques exemples d'intégrales définies dont on obtient la valeur par un seul développement, en arrêtant l'intégration de chaque terme, dès qu'on arrive à une intégrale définie connue. C'est ainsi que M.r LAPLACE a intégré la différentielle $e^{-x^2}.dx.\cos.rx$ en développant $\cos.rx$, et arrêtant l'intégration de chaque terme à $\int dx e^{-x^2}$; Il a trouvé par là, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int dxe^{-x^2}.\cos.rx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Développant $\sin.rx$, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on trouve également

$$\int e^{-x^2}dx.\sin.rx=\frac{1}{2}\left\{r-\frac{r^3}{2.3}+\frac{r^5}{3.4.5}-\frac{r^7}{4.5.6.7}+\ldots\right\};$$

(*Voyez l'Ouvrage cité de* M.r LEGENDRE, *pag.* 363.)

On a pareillement

$$\int\frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x}=\int dx.e^{-ax}\left(r-\frac{r^3x^2}{1.2.3}+\frac{r^5x^4}{1.2.3.4.5}-\ldots\right)$$

$$=-\frac{r}{a}.e^{-ax}$$

$$-\frac{r^3}{1.2.3}.e^{-ax}\left(-\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}-\frac{2.1}{a^3}\right)$$

$$+\frac{r^5}{1.2.3.4.5}e^{-ax}\left(-\frac{x^4}{a}-\frac{4x^3}{a^2}-\frac{4.3.x^2}{a^3}-\frac{4.3.2.x}{a^4}-\frac{4.3.2.1}{a^5}\right)$$

$-$ . . . .

$+ M$;

ce qui donne, depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\int\frac{dxe^{-ax}.\sin.rx}{x}=\text{arc. tang.}\frac{r}{a}.$$

On aura ainsi, par ce qui précède, la valeur des intégrales

$$\int dxe^{-x^2}\overline{\sin.rx}^{2p}\,\overline{.\cos.r'x}^{q},\ \int\frac{dxe^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{2p+1}\,\overline{.\cos.r'x}^{q}}{x},$$

p et q étant des nombres entiers positifs (n.° 19), et les limites des intégrales étant zéro et infini.

35. Soit l'intégrale $\int\frac{dxe^{-ax}\cos.rx}{x}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, on aura

$$\int\frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x}=\int dxe^{-ax}\left(\frac{1}{x}-\frac{r^2.x}{1.2}+\frac{r^4\,x^3}{1.2.3.4}-\ldots\right)$$

$$=\log.x-ax+\frac{a^2\,x^2}{1.2.2}-\frac{a^3\,x^3}{1.2.3.3}+\frac{a^4\,x^4}{1.2.3.4.4}-\ldots$$

$$-\frac{r^2}{1.2}\left\{-\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right\}.e^{-ax}$$

$$+\frac{r^4}{1.2.3.4}.\left\{-\frac{x^3}{a}-\frac{3x^2}{a^2}-\frac{3.2.x}{a^3}-\frac{3.2.1}{a^4}\right\}.e^{-ax}$$

$-$ . . . .

$+$ Const.;

lorsque $x=0$, on a Const. $= -\log.0 - \frac{1}{2}\log.\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$;

par conséquent on a depuis x nul jusqu'à x infini

$$\int\frac{dxe^{-ax}.\cos.rx}{x} = -\log.0 - \frac{1}{2}\log.(a^2+r^2) - \text{A},$$

en observant que l'on a, lorsque $x=\infty$, (n.° 20),

$$\log.x - ax + \frac{a^2x^2}{1.2.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3.3} + \ldots = -\text{A} - \log.a,$$

A désignant le nombre 0, 577 215 ....

On voit par cette valeur l'ordre d'infini que prend l'intégrale proposée. On a également depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int\frac{dx.e^{-a'x}\cos.r'x}{x} = -\log.0 - \frac{1}{2}\log.(a'^2+r'^2) - \text{A};$$

on aura donc entre ces limites

$$\int\frac{dx(e^{-a'x}\cos.r'x - e^{-ax}.\cos.rx)}{x} = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{a^2+r^2}{a'^2+r'^2}\right).$$

De la valeur de l'intégrale $\int\frac{dxe^{-ax}.\cos rx}{x}$ dépend celle de $\int\frac{dxe^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{2p}\cdot\overline{\cos.r'x}^{q}}{x}$, p et q étant des nombres entiers positifs. On trouve ainsi, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, (n.° 19)

$$\int\frac{dx.e^{-ax}.\overline{\sin.rx.}^2\ \overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{1}{8}\log.\left\{\frac{(a^2+4r^2)\sqrt{a^2+4(r+r')^2}\ .\ \sqrt{a^2+4(r-r')^2}}{a^2(a^2+4r'^2)}\right\}.$$

On a encore

$$\int \frac{dx e^{-ax}.\cos.rx}{x^2} = -\frac{e^{-ax}.\cos.rx}{x} - a\int \frac{e^{-ax}dx.\cos.rx}{x} - r\int \frac{dx.e^{-ax}\sin.rx}{x};$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin rx}{x^2} = -\frac{e^{-ax}\sin.rx}{x} - a\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x} + r\int \frac{dx.e^{-ax}\cos.rx}{x};$$

d'où l'on tire depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dxe.^{-ax}\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} + a\left\{ A + \frac{1}{2}\log.(a^2+r^2) + \log.0 \right\} - r.\text{arc. tang.}\frac{r}{a}:$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x^2} = r - a.\text{ arc. tang. }\frac{r}{a} - r\left\{ A + \frac{1}{2}\log.(a^2+r^2) + \log.0 \right\}:$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}(\cos r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{a}{2}.\log.\left(\frac{a^2+r'^2}{a^2+r^2}\right) + r.\text{ arc. tang.}\frac{r}{a}$$

$$- r'.\text{ arc. tang.}\frac{r'}{a}:$$

$$\int \frac{dx.\sin.rx\,(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x^2} = \frac{r}{2}.\log.\left\{\frac{a^2+r^2}{a'^2+r^2}\right\} + a.\text{ arc. tang. }\frac{r}{a}$$

$$- a'.\text{ arc.tang.}\frac{r}{a'}.$$

36. Soit l'intégrale $\int \frac{(x^n-1)}{\log.x}.dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; posons $\log.x=-u$, nous aurons

$$\int \frac{(x^n-1)dx}{\log.x} = \int \left(\frac{e^{-nu}-1}{u}\right).e^{-u}.du;$$

cette dernière intégrale ayant pour limites $u=\infty$, $u=0$. Développant $\frac{e^{-nu}-1}{u}$, on a

$$\int \frac{(e^{-nu}-1)e^{-u}}{u}du = \int e^{-u}du\left\{ -n + \frac{n^2.u}{2} - \frac{n^3.u^2}{1.2.3} + \ldots \right\}$$

$$= - n \quad . \left\{ - e^{-u} \right\}$$

$$+ \frac{n^2}{1.2} \cdot \left\{ - u - 1 \right\} . e^{-u}$$

$$- \frac{n^3}{1.2.3} \cdot \left\{ - u^2 - 2u - 2.1 \right\} e^{-u}$$

$$+ \frac{n^4}{1.2.3.4} \cdot \left\{ - u^3 - 3u^2 - 3.2.u - 3.2.1 \right\} e^{-u}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \text{Const.}$$

Lorsque $u = \infty$, la constante est nulle; on a donc depuis $u = \infty$ jusqu'à $u = 0$

$$\int \frac{(e^{-nu} - 1)\, e^{-u}}{u} . du = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4} + \ldots = \log.(1+n)$$

$$= \int \frac{x^n - 1}{\log.x} . dx \; .$$

Voyez *l'Ouvrage de* M.r Legendre, *pag.* 370, pour les intégrales qui dépendent de celle-ci. Puisqu'on a

$$\int \frac{x^n - 1}{\log.x} dx = \log.(1+n) \; ; \int \frac{x^m - 1}{\log.x} dx = \log.(1+m),$$

on aura en soustrayant la première intégrale de la seconde

$$\int \left(\frac{x^m - x^n}{\log.x} \right) . dx = \log. \left(\frac{1+m}{1+n} \right),$$

résultat trouvé par Euler, et duquel il a tiré de nombreuses conséquences. (*Mémoires de Pétersbourg pour l'an* 1775). Nous remarquerons que la valeur

de cette intégrale définie combine avec l'intégrale du n.° 20

$$\int \frac{dx(e^{-a'x}-e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a' .$$

On trouve dans les mêmes limites $x=0$, $x=1$,

$$\int \frac{dx.(x^n - 1)}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n}} - 1 \right\};$$

$$\int \frac{(x^m - x^n)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\};$$

$$\int \frac{dx.(a^x - 1)}{\log.x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^3} - \frac{1}{4.5^4} + \frac{1}{5.6^5} - \ldots$$

37. Considérons encore l'intégrale $\int \frac{dx.(\log.x)^n}{1+x^2}$ prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant un nombre entier positif. Soit $n=1$, et intégrons la différentielle proposée depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$; nous aurons

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = \int dx.\log.x \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \ldots \right\}$$

$$= -\frac{\log.x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$- \left\{ -\frac{\log.x}{3x^3} - \frac{1}{3^2.x^3} \right\}$$

$$+ \left\{ -\frac{\log.x}{5x^5} - \frac{1}{5^2.x^5} \right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \text{Const.}$$

Cette équation donne entre les limites $x=1$, $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Pour intégrer la même différentielle depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, soit $x=\frac{1}{z}$, on aura

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = \int \frac{dz.\log.z}{1+z^2};$$

l'intégrale relative à z ayant pour limites $z=\infty$, $z=1$. Or on a dans ces limites

$$\int \frac{dz.\log z}{1+z^2} = -1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \ldots$$

on a donc, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\log.x}{1+x^2} = 0,$$

valeur nulle par identité.

On trouve de la même manière

$$\int \frac{dx.\overline{\log x}^2}{1+x^2} = 2\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right) \quad \binom{x=1}{x=\infty}$$

$$\int \frac{dx\,\overline{\log.x}^2}{1+x^2} = 2\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right) \quad \binom{x=0}{x=1}$$

d'où il résulte, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx\,\overline{\log.x}^2}{1+x^2} = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right).$$

En général, puisqu'on a

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = \int dx.\overline{\log.x}^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\overline{\log.x}^n + n.\overline{\log.x}^{n-1} + n(n-1)\overline{\log.x}^{n-2} \ldots + n(n-1)\ldots 3.2.1\right)$$

$$+ \frac{1}{x^3}\left(\frac{\overline{\log.x}^n}{3} + \frac{n.\overline{\log.x}^{n-1}}{3^2} + \frac{n(n-1).\overline{\log.x}^{n-2}}{3^3} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{3^{n+1}}\right)$$

$$- \frac{1}{x^5}\left(\frac{\overline{\log.x}^n}{5} + \frac{n.\overline{\log.x}^{n-1}}{5^2} + \frac{n(n-1)\overline{\log.x}^{n-2}}{5^3} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{5^{n+1}}\right)$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+$ Const.;

on en conclura, depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 1.2.3\ldots n\left\{1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right\}.$$

Faisant ensuite $x = \frac{1}{z}$, et intégrant depuis $z=\infty$ jusqu'à $z=1$, on aura entre les limites $x=0$, $x=1$;

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = (-1)^n.\ 1.2.3\ldots n\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right);$$

d'où l'on voit que lorsque n est impaire, on a depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 0;$$

intégrale nulle par identité. Lorsque n est paire, on a dans les mêmes limites

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^n}{1+x^2} = 2.1.2.3\ldots n.\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} + \ldots\right).$$

Si l'on avait $\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}$ prise depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, on aurait, en faisant $\log.x = u^2$,

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{\frac{1}{2}}}{1+x^2} = 2\int u^2 du\, e^{u^2}\left(\frac{1}{e^{2u^2}} - \frac{1}{e^{4u^2}} + \frac{1}{e^{6u^2}} - \ldots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{7\sqrt{7}} + \ldots\right);$$

l'intégrale par rapport à u ayant pour limites $u=0$, $u=\infty$. On a également depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int \frac{dx.(\log.x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} = \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots\right)$$

$$= \int \frac{dx.\overline{\log.\frac{1}{x}}^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2};$$

cette dernière intégrale ayant pour limites zéro et l'unité.

38. Passons à présent à l'intégrale $\int \frac{dx.\tang.rx}{x^n}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, n étant < 2. Il est clair que cette intégrale est nulle avec x sans constante arbitraire. Or on a

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n} = -\frac{\log.(\cos.rx)}{rx^n} - \frac{n}{r}\int \frac{dx.\log.(\cos.rx)}{x^{n+1}} ;$$

on a aussi

$$\log.(\cos.rx) = -\log.2 + \cos.2rx - \frac{1}{2}\cos.4rx$$
$$+ \frac{1}{3}\cos.6rx - \frac{1}{4}\cos.8rx + \ldots.$$

partant

$$\int \frac{dx.\text{tang}\, rx}{x^n} = -\frac{\log.(2\cos.rx)}{rx^n} - \frac{n}{r}\int \frac{dx}{x^{n+1}}\Big(\cos.2rx - \frac{1}{2}\cos.4rx$$
$$+ \frac{1}{3}\cos.6rx - \frac{1}{4}\cos.8rx + \ldots\Big);$$

ainsi l'intégrale proposée est ramenée à celles du n.° 8. Soit $n=1$, on aura, en développant les termes $\int \frac{dx.\cos.2rx}{x^2}$, $\int \frac{dx.\cos.4rx}{x^2}$, etc.

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x^n} = -\frac{\log.(2\cos.rx)}{rx} + \frac{\cos.2rx}{rx} + 2\int \frac{dx.\sin.2rx}{x}$$
$$- \frac{\cos.4rx}{2rx} - 2\int \frac{dx.\sin.4rx}{x}$$
$$+ \frac{\cos.6rx}{3rx} + 2\int \frac{dx.\sin.6rx}{x}$$
$$- \frac{\cos.8rx}{4rx} - 2\int \frac{dx.\sin.8rx}{x}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par le raisonnement fait déjà plusieurs fois, on prouvera que le second membre de cette équation sera nul avec x. On a donc, lorsque $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \pi\Big\{1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots\Big\} = \frac{\pi}{2} ;$$

on a ainsi ce résultat remarquable

$$\int\frac{dx.\text{tang}.rx}{x}=\frac{\pi}{2}=\int\frac{dx.\sin.rx}{x}.$$

On peut parvenir très-facilement à ce résultat, en observant que l'on a

$$\text{tang}.rx=2.(\sin.2rx-\sin.4rx+\sin.6rx-\sin.8rx+\ldots).$$

On trouve pareillement

$$\int\frac{dx.\text{tang}.rx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{r}}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots\right\};$$

$$\int\frac{dx.\text{tang}.rx}{x\sqrt{x}}=4.\sqrt{\pi r}.\left\{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ldots\right\}.$$

En général puisqu'on a

$$\log.(\sin.rx)=-\log.2-\cos.2rx-\frac{1}{2}\cos.4rx$$
$$-\frac{1}{3}\cos.6rx-\ldots\ldots$$

$$\log.(\text{tang}.rx)=-2\left\{\cos.2rx+\frac{1}{3}\cos.6rx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\cos.10rx+\frac{1}{7}\cos.14rx+\ldots\right\};$$

on trouvera depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\text{(A)}\int dxe^{-x^2}.\log.\cos.rx=-\frac{\sqrt{\pi}.\log.2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\left(e^{-r^2}-\frac{e^{-4r^2}}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-9r^2}}{3}-\frac{e^{-16r^2}}{4}+\ldots\right);$$

$$\int dxe^{-x^2}.\log.\text{tang}.rx=-\sqrt{\pi}.\left(e^{-r^2}+\frac{e^{-9r^2}}{3}\right.$$

$$+\frac{e^{-25r^2}}{5}+\frac{e^{-49r^2}}{7}+\ldots\Big);$$

$$\int dx e^{-x^2}.\ \text{log.sin.}rx=-\frac{\sqrt{\pi}\ .\ \text{log.}2}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .\ \Big(e^{-r^2}+\frac{e^{-4r^2}}{2}$$

$$+\frac{e^{-9r^2}}{3}+\frac{e^{-16r^2}}{4}+\ldots\Big).$$

En différentiant ces équations par rapport à r, on aura les valeurs des intégrales $\int xdx\, e^{-x^2}$. tang.rx, $\int xdx\, e^{-x^2}$. cosèc.rx, $\int xdx\, e^{-x^2}$. cot.rx ; exprimées par des suites qui seront en général très-convergentes.

39. Nous terminerons par une classe d'intégrales qui se présentent sous forme finie. M.r Laplace a trouvé depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$,

$$\int\frac{dx.\text{cos.}rx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2e^r};$$

on aura donc entre ces limites, en substituant les expressions de log.cos.r, log.tang.rx, log.sin.r, rapportées dans le n.° précédent,

$$\int\frac{dx.\text{log.}(\text{cos.}rx)}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\Big(-\text{log.}2+\text{cos.}2rx-\frac{1}{2}\text{cos.}4rx$$

$$+\frac{1}{3}\text{cos.}6rx-\frac{1}{4}\text{cos.}8rx+\ldots\Big)$$

$$=-\frac{\pi.\log.2}{2}+\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{e^{2r}}-\frac{1}{2e^{4r}}+\frac{1}{3e^{6r}}-\frac{1}{4e^{8r}}+\ldots\right\};$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme

$$(1)\int\frac{dx.\log.(\cos rx)}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.\log.\left\{\frac{e^{2r}+1}{2e^{2r}}\right\};$$

on aura semblablement

$$(2)\int\frac{dx.\log.(\text{tang}.rx)}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.\log.\left\{\frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}\right\};$$

$$(3)\int\frac{dx.\log.(\sin.rx)}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.\log.\left(\frac{e^{2r}-1}{2e^{2r}}\right);$$

Différentiant l'équation (1) par rapport à r, et écrivant ensuite $\frac{x}{m}$ et mr, au lieu de x et de r, on aura

$$(4)\int\frac{xdx.\text{tang}.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2mr}+1};$$

si $m=0$, on retombe sur l'intégrale

$$\int\frac{dx.\text{tang}.rx}{x}=\frac{\pi}{2};$$

on tirera de même des équations (2) et (3)

$$(5)\int\frac{xdx.\text{coséc}.2rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi.\,e^{2mr}}{e^{4mr}-1};$$

$$(6)\int\frac{xdx.\cot.rx}{m^2+x^2}=\frac{\pi}{e^{2mr}-1}.$$

On parvient immédiatement aux valeurs (4), (5) et (6) en observant que l'on a

$$\text{tang}.rx=2.\left(\sin.2rx-\sin.4rx+\sin.6rx-\sin.8rx+\ldots\right)$$

$$\text{coséc.}rx = 2\,.\left(\sin.rx + \sin.3rx + \sin.5rx + \sin.7rx + \ldots\right);$$

$$\cot.rx = 2\,.\left(\sin.2rx + \sin.4rx + \sin.6rx + \sin.8rx + \ldots\right).$$

On peut tirer des équations (4), (5) et (6) une suite d'intégrales analogues à celles qu'on déduit de l'intégrale $\int \frac{xdx.\sin.rx}{m^2 + x^2}$.

De l'équation (2) du n.° 29 on déduira entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi}{2m}.\left(\sin.2mr - \frac{1}{2}.\sin.4mr + \frac{1}{3}.\sin.6mr - \frac{1}{4}.\sin.8mr + \ldots\ldots\right);$$

$$\int \frac{dx.\log.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi}{m}.\left(\sin.2mr + \frac{1}{3}.\sin.6mr + \frac{1}{5}.\sin.10mr + \frac{1}{7}.\sin.14mr + \ldots\ldots\right);$$

$$\int \frac{dx.\log.2\sin.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi}{2m}.\left(\sin.2mr + \frac{1}{2}\sin.4mr + \frac{1}{3}\sin.6mr + \frac{1}{4}\sin.8mr + \ldots\ldots\right).$$

Substituant dans les seconds membres de ces équations au lieu des sinus leurs expressions en exponentielles, reduisant et mettant pour $\frac{\log.(-1)}{\sqrt{-1}}$ sa première valeur π, il viendra

$$\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2} = -\frac{\pi r}{2};$$

$$\int \frac{dx.\log.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi^2}{4m};$$

$$\int \frac{dx.\log.2\sin rx}{x^2 - m^2} = \frac{\pi^2}{4m} - \frac{\pi r}{2}.$$

Faisant $r = 0$ dans la première de ces équations, on a $\int \frac{dx}{x^2 - m^2} = 0$, (n.° 31); partant les valeurs des intégrales $\int \frac{dx.\log.\cos.rx}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{dx.\log.\sin.rx}{x^2 - m^2}$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, sont les mêmes que celles des intégrales $\int \frac{dx.\log.2\cos.rx}{x^2 - m^2}$, $\int \frac{dx.\log.2.\sin.rx}{x^2 - m^2}$, prises entre les mêmes limites.

Pareillement l'équation (1) du n.° 29 donnera entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int \frac{xdx.\text{tang}.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.2mr - \cos.4mr + \cos.6mr - \ldots\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int \frac{xdx.\text{coséc}.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.mr + \cos.3mr + \cos.5mr + \ldots\right) = 0;$$

$$\int \frac{xdx.\cot.rx}{x^2 - m^2} = \pi.\left(\cos.2mr + \cos.4mr + \cos.6mr + \ldots\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

TABLEAU

Des valeurs des intégrales définies les plus remarquables contenues dans ce Mémoire.

	LIMITES des intégrales.
$\int \frac{dx.\sin.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$.	
$\int \frac{dx.\sin.rx}{x} = \frac{\pi}{2}$.	
$\int \frac{dx.\sin.rx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi r}$.	
$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^2} = r.(1 - A - \log.r - \log.0) = \infty$.(*)	
$\int \frac{dx.\sin.rx}{x^n}$ { Lorsque $n < 2$, voyez l'équation (A) du n.° 1. Si $n > 2$, voyez le n.° 7.	$x = 0$.
$\int \frac{dx.\cos.rx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}$.	$x = \infty$.
$\int \frac{dx.\cos.rx}{x} = -A - \log.r - \log.0 = \infty$.	
$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2} = \frac{1}{0} - \frac{\pi.r}{2} = \infty$.	

(*) La lettre A représente le nombre 0,577 215... (n.° 5).

$$\int \frac{dx\,(\cos.r'x - \cos.rx)}{x} = \log.r - \log.r'.$$

$$\int \frac{dx.(\cos.r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{\pi}{2}.(r - r').$$

$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^n}$ { Lorsque $n < 1$, voyez l'équation (B) du n.° 3. Si $n > 1$, voyez le n.° 8.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\infty} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4}\sqrt{\infty} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty.$$

etc.

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.r'x}^2 - \overline{\sin.rx}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\}.$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.r'x}^4 - \overline{\sin.rx}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\} - \frac{1}{16}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \sqrt{\frac{\pi}{2r'}}\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x} = \frac{1}{2}\log.\infty + \frac{1}{2}\left\{A + \log.2r\right\} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\sin.rx}^2 - \overline{\sin.r'x}^2)}{x} = \frac{1}{2}\log.r - \frac{1}{2}\log.r'.$$

⋮

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx\,(\overline{\sin.rx}^{2q} - \overline{\sin.r'x}^{2q})}{x} = \frac{1}{2^{2q-1}} \cdot \left\{ \frac{2q(2q-1)\ldots q}{1.\ 2.\ .\ .(q+1)} \right.$$

$$\left. - \frac{2q(2q-1)\ldots(q-1)}{1.\ 2.\ .\ .\ .\ .(q+2)} + \ldots \mp 2q \pm 1 \right\} . \log. \frac{r}{r'} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{2} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^2} = \frac{\pi.r}{4} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^4} = \frac{\pi\,r^3}{3} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^2} = \frac{3.\pi.r}{16} .$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x^3} = r^3 \log.2 .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^3} = \frac{r^2}{16} . \left\{ 24.\log.2 - 9.\log.3 \right\} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^6}{x^5} = \frac{r^4}{16} . \left\{ 27.\log.3 - 32.\log.2 \right\} .$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\pi r} .$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{4r}{3} . \sqrt{\pi r} .$$

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^4}{x\sqrt{x}} = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right).\sqrt{\pi r}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^2} = \frac{3r}{4}.\log.2.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^2} = \frac{r}{16}.\left\{15.\log.3-5.\log.5\right\}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^4} = \frac{r^3}{6.16}.\left\{5^3.\log.5-5.3^3.\log.3\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x^3} = \frac{3\pi.r^2}{8}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x} = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^5}{x^3} = \frac{5\pi.r^2}{32}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{\sqrt{x}} = \left\{\frac{3\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\right\}.\sqrt{\frac{\pi}{2r}}$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^3}{x\sqrt{x}} = \left\{\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right\}.\sqrt{2\pi r}.$$

LIMITES des intégrales.

$x=0$,

$x=\infty$.

$$\int \frac{dx\,\overline{\sin. rx}^3}{x^2\sqrt{x}} = \frac{r.(\sqrt{3}-1)}{2}.\sqrt{2\pi r}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.\overline{\sin. rx}^m}{x^n}$$ m étant un nombre entier positif, et n un nombre entier ou fractionnaire, voyez les n.os 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18.

$$\int \frac{dx.\overline{\cos rx}^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\infty} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} = \infty.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos. rx}^4}{\sqrt{x}} = \frac{3}{4}\sqrt{\infty} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} = \infty.$$

etc.

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos. rx}^2 - \overline{\cos. r'x}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right).$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos. rx}^4 - \overline{\cos. r'x}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.\left\{\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \sqrt{\frac{\pi}{r'}}\right\} + \frac{1}{16}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \sqrt{\frac{\pi}{2r'}}\right\}.$$

etc.

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos. rx}^2 - \overline{\sin. r'x}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r'}}.$$

$$\int \frac{dx.(\overline{\cos. rx}^4 - \overline{\sin. r'x}^4)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{r'}} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r}} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2r'}}.$$

etc.

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\cdot\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^5}{\sqrt{x}} = \frac{1}{16}\cdot\left(10+\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,.$$

etc.

$\int \frac{dx.\overline{\cos.rx}^m}{x^n}$ { m étant un nombre entier positif, et n un nombre entier ou fractionnaire, voyez les n.os 17 et 18.

$$r > r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$r = r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.rx}{x} = \frac{\pi}{4}\,.$$

$$r < r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\cos.r'x}{x} = 0\,.$$

$$r > r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$r = 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

$$r < 2r' \ldots \int \frac{dx.\sin.rx.\overline{\cos.r'x}^2}{x} = \frac{\pi}{4}\,.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2\,.\,\overline{\cos.rx}^2}{x^2} = \frac{\pi.r}{4}\,.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.x}^2\,.\,\overline{\cos.rx}^3}{x} = \frac{\log.15}{16}\,.$$

etc.

$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^p\ \overline{\cos.r'x}^q}{x^n}$ { p et q étant des nombres entiers positifs, voyez le n.° 19.

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx.e^{-ax}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\int \frac{dx.e^{-ax}}{x} = -\mathrm{A} - \log.a - \log.0 = \infty.$$

$$\int \frac{dx\,(e^{-a'x} - e^{-ax})}{x} = \log.a - \log.a'.$$

$$\int dx.e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

$\int \frac{dx.e^{-ax}}{x^n}$ } n étant < 1, voyez le n.° 20.

LIMITES des intégrales.

$x = 0$,

$x = \infty$.

$$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.e^{-mr}.$$

$$\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2+m^2} = \frac{\pi}{2}.e^{-mr}.$$

$$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^{2p}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2+m^2}$$

$$\int \frac{xdx.\overline{\sin.rx}^{2p+1}.\overline{\cos.r'x}^{q}}{x^2+m^2}$$

} p et q étant des nombres entiers positifs, voyez le n.° 22.

$$\int dx.e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-2a}.$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}dx.e^{-\left(\frac{1+x^2}{2nx}\right)} = e^{-\frac{1}{n}}.\sqrt{2\pi n}.$$

	LIMITES des intégrales.
$\int \frac{dx.\cos.rx}{x^2-m^2} = -\frac{\pi.\sin.mr}{2m}$. $\int \frac{xdx.\sin.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}.\cos.mr$.	$x=0$, $x=\infty$.
$\int \frac{dx.\sin.rx}{x-m} = \pi.\cos.mr = \int \frac{dx.\sin.rx}{x+m}$. $\int \frac{dx.\cos.rx}{x-m} = -\pi.\sin.mr = -\int \frac{dx.\cos.rx}{x+m}$.	$x=-\infty$, $x=+\infty$.
$\int dx.e^{-x^2}.\cos.rx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\frac{r^2}{4}}$. $\int \frac{dx.e^{-ax}.\sin.rx}{x} = \text{arc.tang.}\frac{r}{a}$. $\int \frac{dx.e^{-ax}.\cos.rx}{x} = -(A+\log.\sqrt{a^2+r^2}+\log.0) = \infty$. $\int \frac{dx\,(e^{-a'x}.\cos.r'x - e^{-ax}.\cos.rx)}{x} = \frac{1}{2}.\log.\left(\frac{a^2+r^2}{a'^2+r'^2}\right)$. $\int \frac{dx.e^{-ax}(\cos r'x - \cos.rx)}{x^2} = \frac{a}{2}.\log.\left(\frac{a^2+r'^2}{a^2+r^2}\right) + r.\,\text{arc.tang.}\frac{r}{a} - r'.\,\text{arc.tang.}\frac{r'}{a}$. $\int \frac{dx.\sin.rx(e^{-a'x}-e^{-ax})}{x^2} = \frac{r}{2}.\log.\left(\frac{a^2+r^2}{a'^2+r^2}\right) + a\,\text{arc.tang.}\frac{r}{a} - a'\,\text{arc.tang.}\frac{r}{a'}$.	$x=0$, $x=\infty$.

		LIMITES des intégrales.
$\int dx.\, e^{-x^2} . \overline{\sin.rx}^{2p} . \overline{\cos.r'x}^{q}$; $\int \frac{dx.e^{-ax}.\overline{\sin.rx}^{p} . \overline{\cos.r'x}^{q}}{x}$;	p et q étant des nombres entiers positifs, voyez les n.os 34 et 35.	$x=0$, $x=\infty$.

$$\int \frac{(x^n - 1)dx}{\log.x} = \log.(n+1).$$

$$\int \frac{(x^m - x^n)dx}{\log.x} = \log.\left(\frac{m+1}{n+1}\right).$$

$$\int \frac{(x^n - 1)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} . \left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\right\}.$$

$$\int \frac{(x^m - x^n)dx}{(\log.x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} . \left\{\frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}.$$

Limites : $x=0$, $x=1$.

$$\int \frac{dx.\overline{\log.x}^{2n+1}}{1+x^2} = 0.$$ { n étant un nombre entier positif.

$$\int \frac{dx.\text{tang}.rx}{x} = \frac{\pi}{2} = \int \frac{dx.\sin.rx}{x}.$$

$$\int \frac{dx.\log.\cos.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}+1}{2e^{2mr}}\right).$$

$$\int \frac{dx\,\log.\text{tang}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}-1}{e^{2mr}+1}\right).$$

$$\int \frac{dx.\log.\sin.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{2m}.\log.\left(\frac{e^{2mr}-1}{2e^{2mr}}\right).$$

Limites : $x=0$, $x=\infty$.

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{tang}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}+1}.$$

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{cos\acute{e}c}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi.e^{mr}}{e^{2mr}-1}.$$

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{cot}.rx}{m^2+x^2} = \frac{\pi}{e^{2mr}-1}.$$

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{tang}.rx}{x^2-m^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{cos\acute{e}c}.rx}{x^2-m^2} = 0.$$

$$\int \frac{x\,dx.\mathrm{cot}.rx}{x^2-m^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

LIMITES des intégrales.

$x=0$,

$x=\infty$.

Pag.	Lign.	FAUTES.	CORRECTIONS.
239.	4.	$\pm\frac{1}{1.2.3.(2\nu-1)}$	$\pm\frac{1}{1.2.3...(2\nu-1)}$
271.	5.	$(q+3)$	$(q+4)$
308.	14.	$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\ldots$	$+\frac{m^4 r^4}{1.2.3.4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\ldots$
318.	11.	$+\frac{a^3}{1.2.3.4.5.5}$	$+\frac{a^5}{1.2.3.4.5.5}$

DESCRIPTION

D'UN NOUVEAU BAROMÈTRE

POUR LES AËRONAUTES

PAR H. CARENA.

Lue à la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques dans la Séance du 23 Mai 1812.

PARMI les différents instrumens de physique, il n'y en a peut-être aucun, auquel on ait donné des formes aussi variées, qu'au baromètre.

Le tube de TORRICELLI n'était d'abord qu'un baroscope; mais on s'aperçut bientôt que la hauteur du mercure dans cet instrument n'était pas constamment la même, et pour tenir compte de ce changement on ajouta une échelle sur la planchette qui portait l'instrument, et alors le baroscope commença à devenir un baromètre.

L'attention que les physiciens ont donnée aux mouvemens du mercure dans le baromètre leur a excité ensuite le désir de les rendre plus sensibles, ce qui a

donné origine au baromètre incliné de M.r Morland, celui à index et à poulie du D.r Hook, etc. Les formes du baromètre se sont encore plus multipliées depuis qu'on en a fait un instrument de géodésie pour mesurer les grandes hauteurs sur la surface du globe, et surtout lorsqu'on a pensé à remédier à l'inconvénient du changement de niveau du mercure dans la cuvette, en donnant aux baromètres la forme d'un syphon renversé (1), ou en fesant mobile le fond de la cuvette, (2) ou bien en employant une double cuvette (3).

La mesure des hauteurs avec le baromètre a fait naître ensuite l'idée de mesurer avec le même instrument les profondes cavités du globe que des circonstances physiques ou chimiques rendent souvent inaccessibles à l'observateur. On y est parvenu par le moyen des baromètres *à appendice*; c'est un tube de quelques pouces de longueur, fermé hermétiquement d'un côté, et communiquant de l'autre avec le vide barométrique. Ce baromètre descendu avec une corde dans les cavités souterraines, verse dans cette appendice, qui est inclinée, tout le mercure qui devrait monter par

(1) Voyez Deluc, recherches sur les modifications de l'atmosphère tom. II, chap. 1, et Beccaria Gradus Taurin., pag. 84.

(2) Voyez la descrip. d'un nouveau barom. portatif du Prof. Vassalli-Eandi. Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de Turin, année 1805, pag. 1.

Voyez aussi son météorographe. Ibid. année 1804, pag. 426.

(3) Nouveau barom. à niveau constant de M.r Capel artiste-mécanicien à Turin.

l'effet de la plus grande pression de l'air atmosphérique.

Telles sont à-peu-près les différentes formes que les physiciens ont données au baromètre : parmi lesquelles je n'en ai pas trouvé qui m'aient paru assez propres aux observations des voyageurs aëriens, qui peuvent bien observer le baromètre ordinaire de tems à autre, mais qu'une foule de circonstances empêchent de s'occuper uniquement de cette observation, surtout pour attraper le moment du plus grand raccourcissement de la colonne barométrique, qui est précisément celui de la plus grande élévation de l'aërostat.

Je désire que celui que j'ai fait construire dernièrement, puisse être jugé propre à remplir cet objet.

DESCRIPTION DE L'INSTRUMENT.

abc est la canne barométrique de la longueur de 30 pouces environ, et du diamètre intérieur de 1, 2 lignes dans toute sa longueur, son diamètre extérieur étant de 3 lignes. Elle plonge dans le tube *b n c* exactement cylindrique depuis *o o* jusqu'en *c*, et dont le diamètre intérieur est de 6, 5 lignes. Ce tube qui a une longueur d'environ trois pouces, et qui sert de cuvette, embrasse librement la canne barométrique par une espèce de goulot *p q*; de cette manière la canne barométrique est solidement maintenue dans sa position, puisqu'elle appuye en *c* sur le fond de la cuvette, elle est retenue

en *b* par le goulot de la même cuvette, et le reste *b a* est placé dans la cannelure de la planchette *x v k* qui porte l'échelle, dont l'origine est en *n n* niveau du mercure dans la cuvette.

La cuvette entre dans un vase cylindrique de buis *d e h g f* fait au tour: la figure présente la coupe de ce vase pour en laisser voir la forme intérieure: la partie inférieure est rapportée à vis en *e g* pour plus de commodité dans l'exécution. Le fond de ce vase présente d'abord tout au tour un sillon rond *t r*, *t r*, puis il se relève vers le centre pour former le petit support *r r* sur lequel appuye la cuvette retenue supérieurement en *p q* par deux demi-disques de liège, dont l'échancrure qui est au centre, embrasse le goulot de la cuvette, tandis que leur circonférence s'adapte intérieurement au vase cylindrique de buis. Ce qui achève de bien assujettir toutes ces pièces est un cercle de peau percé à son milieu d'un trou un peu plus petit que le diamètre extérieur de la canne barométrique: on le fait passer en *a*, et en le forçant un peu on le porte jusqu'en *b*, où il enveloppe extérieuremeut l'ouverture *d f*, en le liant fortement avec du fil autour des petites cannelures circulaires *d f* (1).

A la partie la plus basse du sillon rond au fond de

(1) Pour plus grande certitude de la communication de l'air atmosphérique on peut percer cette peau de plusieurs petits trous avec une épingle: je me suis cependant assuré que cette précaution n'est pas nécessaire.

l'étui il y a deux trous *t t* avec deux autres à égale distance des premiers. Ces quatre trous pénètrent dans le fond de l'étui, et en se joignant en *s* vont aboutir en *h*, où ils ne forment plus qu'un seul trou, qui communique avec la capacité de la boule creuse *h i m*, lorsqu'elle est vissée en *h*.

D'après cette description on conçoit que l'effet des premières dépressions du mercure dans le baromètre est de transporter en *o o* la ligne du niveau qui était auparavant en *n n*, et ensuite à mesure que le mercure continue à baisser dans le baromètre, il s'écoule par les trous *o o*, d'où il se rend dans la boule creuse *h i m*.

La personne qui est dans l'aérostat n'a qu'à ôter doucement cette boule, aussitôt qu'elle commence à descendre pour ne plus monter, et la fermer ensuite avec le bouchon à vis *z* (1). La connaissance du poids de ce mercure lui donne celle de la plus grande élévation dans son voyage. En effet si l'on sçait quel est le poids du mercure de la hauteur par exemple d'un pouce dans le baromètre, en divisant par ce poids celui du mercure tombé dans la boule creuse, joint à celui qui répond à la hauteur *n o* dans la cuvette, le quotient in-

---

(1) Après avoir ôté la boule susdite, le voyageur peut en subsistuer une autre semblable qu'il aura sur lui : le mercure sera par-là hors de tout danger de se répandre, et l'instrument sera encore en état de se mettre en équilibre avec une colonne quelconque d'air atmosphérique même près du sol, la cuvette contenant pour celà assez de mercure.

diquera combien de pouces de mercure sont sortis du baromètre, et par conséquent quelle est la plus grande hauteur à laquelle est parvenu l'aërostat. (1)

Au reste voici de quelle manière je me suis procuré ces données.

J'ai rempli de mercure toute la canne barométrique, j'ai marqué sur elle un point vers le bout fermé pour ne pas comprendre dans l'opération cette partie irrégulière : ensuite ayant mesuré la distance entre ce point, et l'extrémité ouverte de la canne, elle a été trouvée de 28 pouces et 11 lignes, et le poids du mercure compris entre l'espace susdit, de 7 décagrammes avec la fraction décimale 275 centigrammes. Ce poids de 7275 centigrammes divisé par 28 pouces et 11 lignes, donne 251, 585 centigrammes pour le poids de chaque pouce de mercure contenu dans la canne barométrique.

Après cela j'ai placé la canne vide dans la cuvette, dans laquelle j'ai versé une certaine quantité de mercure, jusqu'à remplir toute la partie ronde de la cuvette, et même une partie de sa capacité cylindrique : j'ai considéré le niveau de ce mercure, comme le vrai fond de la cuvette, et je l'ai marqué avec un point,

---

(1) La méthode d'évaluer par le poids les volumes de mercure dans le baromètre, a été proposée dès l'an 1784 par notre Collégue M. l'abbé Valperga-de Caluso, Membre et Directeur de la Classe des Sciences physiques et mathématiques. Voyez Mém. de l'Acad. Royale des Sciences de Turin, années 1784 — 5, pag. 109.

ensuite j'y ai versé les 28 pouces et 11 lignes de mercure que je venais de peser : ce mercure s'est élevé dans la cuvette d'un pouce et 5 lignes, d'où il résulte que chaque ligne de mercure dans la cuvette pèse 427, 94 centigrammes.

Maintenant, si on suppose que la distance de la ligne de niveau *n n* aux bords inférieurs des trous *o o* est de 3 lignes (1), le poids de ces trois lignes de mercure sera de 1283, 82 centigrammes.

La connaissance du rapport entre ces trois lignes de mercure dans la cuvette, et la hauteur correspondante qu'occuperait ce même mercure dans le baromètre, est évidemment indispensable, car le raccourcissement total de la colonne barométrique que l'on veut connaître répond à toute la quantité de mercure qui se trouve avoir dépassé la ligne du niveau primitif *n n*; or cette quantité se compose d'abord du poids du mercure *n o*, ensuite du poids du mercure tombé dans la boule (2) :

---

(1) Cette distance pourra être portée à deux lignes sans inconvénient, pourvu que l'on ne donne qu'environ un demi pouce au vide barométrique ; car alors l'inclinaison nécessaire pour détruire ce vide ne fera point verser le mercure par les trous, dans le transport sur le lieu de l'expérience. Outre qu'il n'y aurait pas d'inconvénient, si un peu de mercure venait à tomber dans la boule, puisqu'il y serait déjà en compte de la quantité plus grande qui doit couler dans l'ascension aërostatique.

(2) Pour exprimer cette évaluation avec toute l'exactitude possible il faudrait encore tenir compte de la petite élévation du mercure dans le baromètre, produite par le poids des trois lignes de mercure dans la cuvette, mercure que

la première de ces deux quantités, variable en elle-même, devient constante, dès que l'instrument est construit, la seconde dépend de l'élévation à laquelle a été porté le baromètre; la somme de ces deux quantités exprime donc le poids total du mercure sorti de l'instrument par l'effet de son transport dans les hautes régions de l'air; d'où il s'ensuit enfin qu'en divisant ce poids par 251, 585 centig. (poids d'un pouce de mercure dans le baromètre) on a pour quotient le raccourcissement total de la colonne barométrique, qui, corrigée des effets des températures, et calculée par les méthodes connuès donne la plus grande hauteur verticale de l'aërostat.

Je joins ici un type de ce calcul pour rendre cette opération plus claire.

	centigr.
Poids du merc. dans la boule . »	1736
Poids des trois lignes de mercure dans la cuvette . . . . »	1283, 82
Poids total . . . . »	3019, 82
Poids d'un pouce de mercure dans le baromètre 251, 585	

En fesant la division on aura » $\frac{3019,\ 82}{251,\ 585} = 12$

l'on a considéré comme ne fesant plus partie du baromètre, mais qui réellement ne cesse pas d'agir par son poids sur la colonne barométrique, en la tenant un peu plus élevée, qu'elle ne le serait sans cette petite pression. D'après le rapport des quarrés des diamètres du tube et de la cuvette, cette différence serait un peu moins de trois lignes dans mon baromètre.

Le raccourcissement du mercure dans le baromètre aurait donc été de 12 pouces, en négligeant une petite fraction qui n'est pas la 24.e partie d'une ligne.

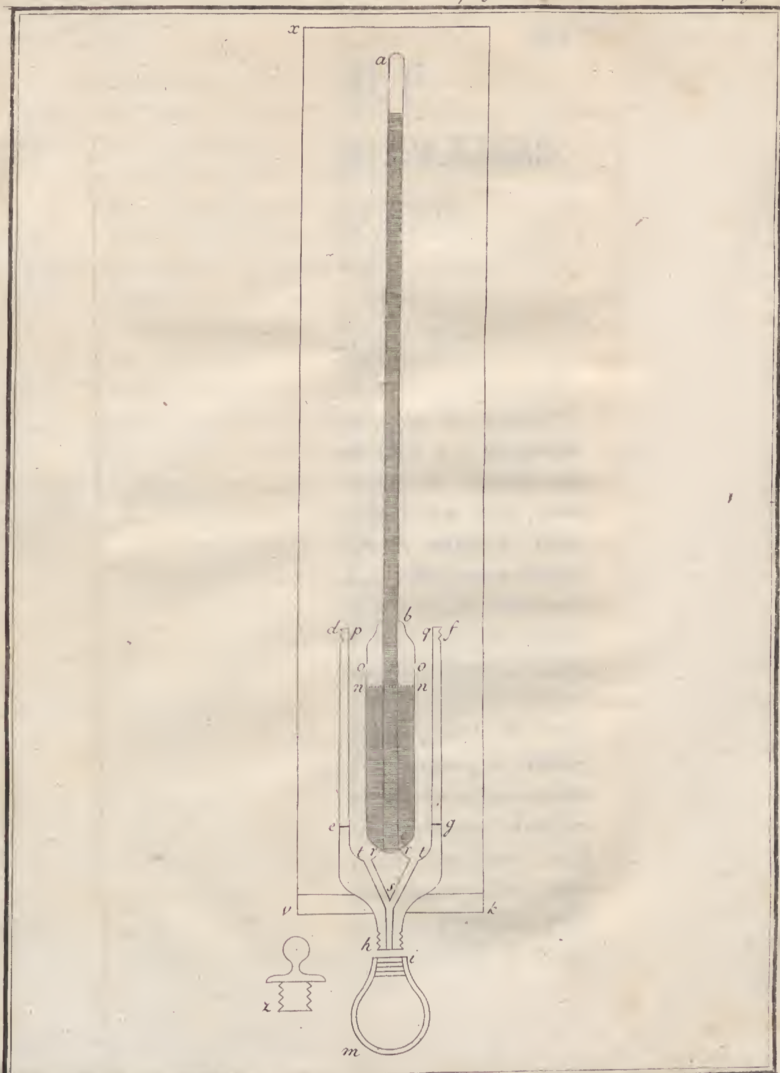
Je ne chercherai point à dissimuler les difficultés, que peut présenter l'usage de cet instrument. La plus grande me paraît celle qui vient des oscillations que peut faire la colonne barométrique pendant l'élévation de la machine aërostatique, oscillations dont l'effet serait de faire sortir de la cuvette une quantité de mercure plus grande que celle qui répond à la seule diminution de pression des colonnes atmosphériques.

Mais, 1.°, les différentes relations des physiciens qui se sont élevés en l'air nous apprennent que tout mouvement dans les machines aërostatiques est extrêmément doux, et nul, que je sache, ne nous a parlé de ces oscillations de manière à nous faire croire qu'elles soient bien grandes.

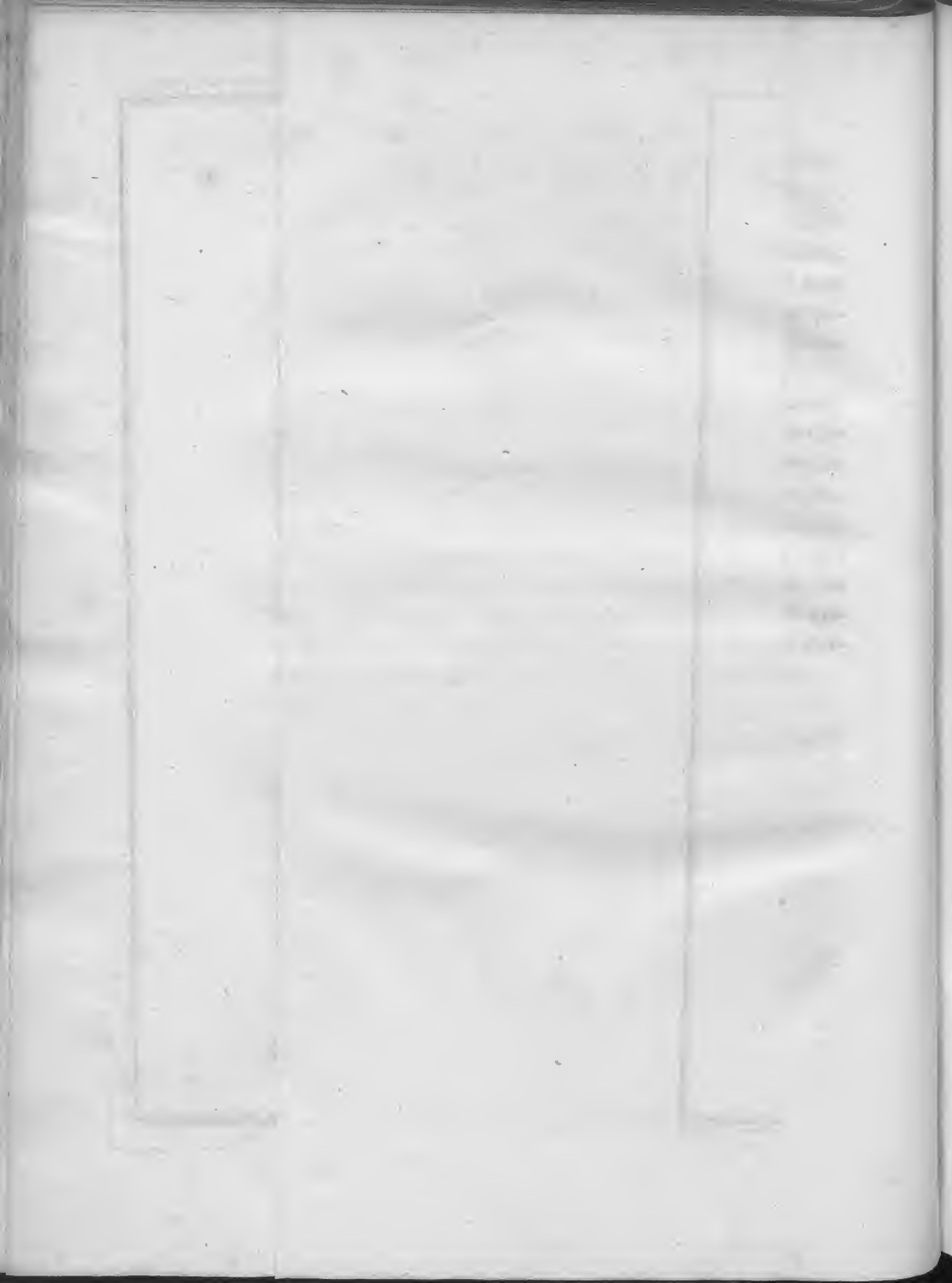
2.° On vient de voir que le poids d'un pouce de mercure dans le baromètre est de 251, 585 centigr. tandis que celui des trois lignes de mercure dans la cuvette, est de 1283, 82 centig., ce qui fait presque deux pouces de mercure dans le baromètre pour chaque ligne dans la cuvette, et plus de 5 pouces pour les trois lignes; il suit de là que ces oscillations, si elles ont lieu, et surtout les premières, qui devraient être les plus grandes, ne pourront point faire sortir le mercure dans la cuvette, à moins qu'on ne veuille les supposer de plusieurs pouces, ce qui ne paraît pas ad-

missible. Qu'on ajoute à cela que, d'après les dimensions que j'ai données à cet instrument, l'espace *n*, savoir celui qui est compris entre le tube barométrique et la cuvette n'est que d'une ligne et demie environ, ce qui fait que le mercure dans la cuvette obéit sensiblement à la loi de la *capillarité*, de sorte qu'une petite secousse, et même une certaine inclinaison ne sont point suffisantes pour le faire sortir de la cuvette.

3.° En proposant aux voyageurs aëriens l'instrument que je viens de décrire, mon but n'est pas de les dispenser d'observer un autre baromètre : ces observations comparatives sont au contraire très-nécessaires, et je les recommande vivement aux mêmes voyageurs, jusqu'à ce que l'expérience ait montré s'ils peuvent se fier aux indications de mon instrument, ou bien quelles sont les modifications qu'on pourrait apporter dans sa construction, pour le rendre aussi parfait qu'il est possible.



Gravé par Amati, et Tela



MÉMOIRE
SUR DIVERS PROBLÈMES DE PROBABILITÉ.

PAR M. PLANA.

Lu dans la Séance du 30 Novembre 1812.

Je donne dans ce Mémoire la solution de plusieurs questions concernant la probabilité qu'il y a d'amener une somme donnée, lorsque l'on jette au hasard un nombre quelconque de polyèdres dont les faces sont marquées par des nombres positifs et négatifs. L'on sait que la théorie des combinaisons offre une solution directe des problèmes de cette espèce, en les réduisant à la recherche d'un certain terme résultant du développement d'un polynome élevé à une puissance. Cette recherche devient d'autant plus pénible que le nombre des dés que l'on considère est plus grand, de sorte que si ce nombre dépasse certaines limites, la réduction des formules en nombres exigerait des calculs d'une longueur excessive. C'est donc principalement dans les cas où le nombre des polyèdres est très-grand qu'il est important de donner des formules susceptibles d'une application facile. La méthode la plus générale pour remplir cet objet est sans doute celle que M.r Laplace

a donnée dans les Mémoires de l'Académie de Paris (année 1782) : Elle ramène la question à la recherche d'une intégrale définie que l'on tache ensuite d'évaluer par une série convergente, en profitant de la circonstance des grands nombres qu'elle renferme.

En s'arrêtant au premier énoncé des problèmes dont il est question dans ce Mémoire, l'on pourrait croire qu'ils sont plus curieux qu'utiles; mais en examinant la chose de plus près, l'on ne tarde pas à reconnaître que mon principal objet est celui de démontrer d'une manière à la fois simple et rigoureuse les principes relatifs au milieu que l'on doit choisir entre les résultats de plusieurs observations, et c'est sans doute sous ce rapport qu'ils doivent exciter l'attention de l'Astronome et du Physicien. Lorsque l'on veut soumettre cette théorie à l'analyse des hasards, il est d'abord nécessaire, pour mieux fixer les idées, de lui ôter ce qu'elle paraît avoir de vague, et c'est pour cette raison qu'il m'a paru plus simple de la présenter sous forme de problèmes concernant les polyèdres. L'esprit se trouve par là habitué à raisonner sur des objets simples et clairs, qu'il saisit avec plus de promptitude et plus de netteté, et passe ensuite sans efforts aux conséquences d'une plus grande utilité.

L'on trouve dans les derniers Mémoires publiés par M.r Laplace, des recherches très-savantes sur cette matière; mon but sera rempli si l'Académie vient à reconnaître que j'aie donné quelque développement aux idées de ce grand homme.

ANALYSE DES PROBLÈMES.

Imaginons un dé composé d'un nombre pair de faces, exprimé par $2n$. Supposons les n premières faces respectivement marquées par la suite des nombres $1, 2, 3, \ldots n$; et les n faces restantes marquées avec les mêmes nombres pris négativement, c'est-à-dire, par la suite $-1, -2, -3, \ldots -n$. L'on demande la probabilité qu'il y a d'amener une somme égale à zéro, en jétant au hasard un nombre P de polyèdres semblables.

Il est aisé de voir, par la théorie des combinaisons, que la probabilité cherchée se trouve en élevant à la puissance P le polynome

$$x^{-n}+x^{-(n-1)}\ldots+x^{-2}+x^{-1}+x^{1}+x^{2}\ldots+x^{n-1}+x^{n}=X;$$

et en prenant dans le développement le terme indépendant de x. L'on pourrait déterminer ce coëfficient par la méthode que Lagrange a donnée à la page 206 du Tome V des Mémoires de l'Académie de Turin; mais la formule que l'on trouverait en opérant ainsi serait tellement compliquée pour une valeur considérable de P qu'il serait presqu'impossible de pouvoir la réduire en nombres. Et pour s'en convaincre il suffit de remarquer que dans le cas très-simple où $n=1$ et

$P = 2q$, l'on a pour valeur du coëfficient cherché

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)\ldots\ldots 2q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots q};$$

formule dont la réduction en nombres est très-pénible, lorsque q a une valeur considérable. L'on sait que STIRLING a franchi le premier cette difficulté en réduisant cette formule dans une série descendante par rapport à q, de manière que l'on a, en nommant π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité,

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)\ldots 2q}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots q} = \frac{2^{2q}}{\sqrt{q\pi}}\left(1 - \frac{1}{8q} + \frac{1}{128.q^2} - \text{etc.}\right)$$

avec d'autant plus d'exactitude que q est un plus grand nombre.

2. En suivant l'exemple de STIRLING nous allons tacher de réduire dans une série descendante, par rapport à P, le terme indépendant de x du polynome X^P. Pour ces sortes de réduction, LAPLACE a donné un principe général dans les Mémoires de l'Académie de Paris. D'après ce principe, il faut commencer par exprimer la fonction qu'il s'agit d'évaluer par une intégrale définie, et ensuite il faut développer cette intégrale dans une série convergente.

Pour bien saisir la force de ce principe il est nécessaire de l'appliquer à plusieurs exemples.

Pour trouver dans notre cas l'intégrale définie qui est égale à la quantité cherchée, remarquons d'abord que puisque celle-ci est indépendante de la valeur de

x, rien n'empêche de poser $x=e^{\varpi\sqrt{-1}}$ et de considérer le polynome,

$$X^{P}=\left(2\cos.\varpi+2\cos.2\varpi+2\cos.3\varpi\ldots+2\cos.n\varpi\right)^{P}\ldots\ldots(1)$$

Supposons pour un instant développé le second membre de cette équation; il est aisé de comprendre que l'on aura une série de la forme

$$2.^{P}\left(A+A'\cos.\varpi+A''\cos.2\varpi+\text{etc.}\right):$$

Or en multipliant cette série par $d\varpi$, et intégrant depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$, il est clair que $2^{P}A\pi$ sera le résultat de l'intégration; donc si l'on nomme Y le coëfficient indépendant de ϖ de la formule (1), l'on aura

$$Y=\frac{2^{P}}{\pi}\int d\varpi\left(\cos.\varpi+\cos.2\varpi+\cos.3\varpi\ldots+\cos.n\varpi\right)^{P}\ldots\ldots(2)$$

les limites de l'intégrale étant $\varpi=0$, $\varpi=180°$.

3. Maintenant il faut nous occuper d'intégrer cette expression par une série descendante par rapport à P. Comme la plus grande valeur de la fonction

$$\cos.\varpi+\cos.2\varpi+\cos.3\varpi\ldots\ldots+\cos.n\varpi$$

cosrespond à $\varpi=0$, auquel cas elle se réduit à n, nous poserons

$$\left(\cos.\varpi+\cos.2\varpi+\cos.3\varpi\ldots+\cos.n\varpi\right)^{P}=n.^{P}e^{-t^{2}}\ldots\ldots(3)$$

e désignant la base des logarithmes hyperboliques. Nous aurons donc

$$Y = \frac{(2n)^P}{\pi} \int d\varpi . e^{-t^2}$$

où il faut considérer ϖ comme une fonction de t qui doit être donnée par l'équation (3). Pour trouver les limites de t, remarquons qu'en faisant $\varpi = 180°$, l'équation (3) donne

$$o = n^P . e^{-t^2}$$

si n est pair; et

$$(-1)^P = n^P . e^{-t^2}$$

lorsque n est impair. Il suit de là que si n est *pair* l'on satisfera à l'équation $o = n^P . e^{-t^2}$ en prenant $t = \infty$, et cela sera vrai, soit en supposant P nombre pair, soit en supposant P nombre impair: Mais lorsque n est *impair*, il est impossible de satisfaire à l'équation $(-1)^P = n^P . e^{-t^2}$ par des valeurs réelles de t à moins que P ne soit un nombre pair: Dans cette hypothèse l'on a $\frac{1}{n^P} = e^{-t^2}$, et comme P est censé très-grand, et n plus grand que l'unité, il est évident que l'on satisfera à cette équation en prenant encore $t = \infty$.

Les limites de l'intégration par rapport à t sont donc $t = o$, $t = \infty$. Si l'on fait $\frac{1}{P} = \alpha$, l'équation (3) donnera

$$\cos.\varpi + \cos.2\varpi + \cos.3\varpi \ldots + \cos.n\varpi = n.e^{-\alpha t^2}$$

et en développant le premier membre suivant les puissances de ϖ l'on aura

$$n - \frac{\varpi^2}{1.2.} \cdot S' + \frac{\varpi^4}{1.2.3.4.} \cdot S'' - \frac{\varpi^6}{1.2.3.4.5.6.} \cdot S''' + \text{etc.} = n.e^{-\alpha t^2}$$

en posant

$$S' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + n^2;$$

$$S'' = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 \ldots\ldots + n^4;$$

$$S''' = 1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 \ldots\ldots + n^6;$$

etc.

Pour donner à cette équation une forme plus simple, nous ferons

$$a = \frac{1}{1.2.} \frac{S'}{n};\ b = \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{S''}{n};\ c = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} \frac{S'''}{n};\ \text{etc.}$$

de sorte que l'on aura

$$\varpi^2 \left(a - b\varpi^2 + c\varpi^4 - \text{etc.} \right) = 1 - e^{-\alpha t^2}$$

d'où l'on tire

$$\varpi \sqrt{a} \left\{ 1 - \frac{b}{2a} \varpi^2 + \varpi^4 \left(\frac{c}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} \right) + \text{etc.} \right\}$$

$$= t\sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{s}{96} \alpha^2 t^4 \text{ etc.} \right) . \alpha t^2$$

En appliquant à cette équation la formule de NEWTON pour le retour des suites l'on trouve

$$\varpi = \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \cdot t \left(1 - \alpha t^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \right) \right)$$

en négligeant les termes suivans. En tirant de cette équation la valeur de $d\varpi$ l'on en conclura

$$y = \frac{(2n)^{\mathrm{P}}}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\int dt.e^{-t^2} + \frac{(2n)^{\mathrm{P}}}{\pi}\frac{3\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2a^2}\right)\int dt.t^2e^{-t^2};$$

Or entre les limites prescrites l'on sait que

$$\int dt.e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \quad \int t^2\, dt.e^{-t^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi},$$

donc

$$y = (2n)^{\mathrm{P}}\sqrt{\frac{\alpha}{a\pi}}.\left\{\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2a^2}\right)\right\}.$$

L'on aura les valeurs de a et de b à l'aide des formules connues

$$\mathrm{S}' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3};$$

$$\mathrm{S}'' = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.3.5},$$

et en les substituant dans celle de y il viendra

$$y = \frac{(2u)^{\mathrm{P}}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi\mathrm{P}(n+1)(2n+1)}}\left\{1 - \frac{3}{8\mathrm{P}}.\frac{4n^2+9n+7}{5.(n+1)(2n+1)}\right\}.$$

Il ne faut pas oublier que cette formule est vraie pour toutes les valeurs entières et positives de n, lorsque P est un nombre pair; mais si P est impair, il est nécessaire que n soit un nombre impair.

En retenant seulement le premier terme de la formule précédente, ce qui suffit pour des valeurs très-grandes de P, la probabilité cherchée sera égale à

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi\mathrm{P}(n+1)(2n+1)}}.$$

Si l'on suppose le nombre n considérable, cette formule se réduit à

$$\frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi p}}.$$

4. Il n'est pas plus difficile de résoudre le même problème dans le cas où chaque dé est composé d'un nombre impair de faces exprimé par $2n+1$, dont une soit marquée avec un zéro. En effet, soit y le terme indépendant de x résultant du développement du polynome

$$\left(x^{-n} + x^{-(n-1)} \ldots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x^{1} + x^{2} \ldots + x^{n-1} + x^{n} \right)^{p}$$

l'on aura ici, par ce qui a été dit précédemment,

$$y = \frac{1}{\pi} \int d\varpi \left(1 + 2\cos.\varpi + 2\cos.2\varpi \ldots + 2\cos.n\varpi \right)^{p}$$

en intégrant depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 180°$.

Maintenant si l'on pose

$$\left(1 + 2\cos.\varpi + 2\cos.2\varpi \ldots + 2os.n\varpi \right)^{p} = (2n+1)^{p}.e^{-t^2} \ldots (4)$$

l'on aura

$$y = \frac{(2n+1)^{p}}{\pi} \int d\varpi.e^{-t^2}$$

les limites de t étant, quelque soit n, $t=0$ et $t=\infty$.

En développant l'équation (4) comme nous avons fait dans le N.° précédent, l'on trouvera,

$$1 - e^{-\alpha t^2} = \frac{\varpi^2}{1.2} \frac{2S'}{1+2n} - \frac{\varpi^4}{1.2.3.4} \frac{2S''}{1+2n} + \text{etc.}$$

et de là il est fort aisé d'en conclure, à l'aide des formules précédentes,

$$y = \frac{(1+2n)^{\mathrm{P}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2\mathrm{P}\pi n(n+1)}} \left(1 - \frac{3}{8\mathrm{P}} \cdot \frac{(17 \cdot n^2 + 17n + 1)}{20 \cdot n(n+1)}\right).$$

En conservant seulement le premier terme de cette formule l'on aura

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\mathrm{P}\pi n(n+1)}}$$

pour la probabilité demandée: Et si n est un nombre très-grand l'on aura

$$\frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\mathrm{P}\pi}}$$

comme dans le cas précédent.

5. L'on peut rendre l'énoncé du problème du N.° 1 plus général, en demandant la probabilité qu'il y a pour que la somme des nombres marqués sur la face de chaque dé soit égale à une quantité donnée q. Il est clair que ce problème se réduit à déterminer le coëfficient de x^q qui se trouve dans le développement de la fonction X^{P}, ou ce qui revient au même, à déterminer le coëfficient de $\cos. q\varpi$ de la fonction

$$\left(2\cos.\varpi + 2\cos.2\varpi \ldots\ldots + 2\cos.n\varpi\right)^{\mathrm{P}};$$

Mais $\cos. q\varpi = \cos. -q\varpi$; de plus il est évident que $\cos. q\varpi$, et $\cos. -q\varpi$ ont le même coëfficient, donc il faudra prendre seulement la moitié du coëfficient de $\cos. q\varpi$

pour avoir exactement le coëfficient de x^q, ou ce qui est encore plus simple, il suffira de prendre le terme indépendant de ϖ de la fonction

$$\cos.q\varpi\left(\cos.\varpi+2\cos.2\varpi\ldots\ldots+2\cos.n\varpi\right)^{P}.$$

Il suit de là que si l'on nomme y le coëfficient cherché, l'on aura

$$y=\frac{2^{P}}{\pi}\int d\varpi.\cos.q\varpi\left(\cos.\varpi+\cos.2\varpi+\cos.3\varpi\ldots+\cos.n\varpi\right)^{P}\ldots(5)$$

les limites de l'intégrale étant $\varpi=0$, $\varpi=180°$.

En substituant dans cette équation à la place de

$$\left(\cos.\varpi+\cos\varpi.2\ldots+\cos.n\varpi\right)^{P}$$

sa valeur trouvée dans le N.° 3, l'on aura

$$y=\frac{(2n)^{P}}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{aP}}\int dt.\cos q\varpi.e^{-t^2}\left(1-\frac{3}{P}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2a^2}\right)t^2\right).$$

Or nous avons

$$q\varpi=\frac{q.t}{\sqrt{aP}}-\frac{q}{P}\frac{t^3}{\sqrt{aP}}\left(\frac{1}{4}-\frac{b}{2a^2}\right)+\text{etc.}$$

donc toutes les fois que q est très-petit par rapport à P, et que P est un nombre très-grand, l'on aura par une approximation suffisante $\varpi=\frac{qt}{\sqrt{aP}}$, et

$$y=\frac{(2n)^{P}}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{aP}}\int dt.\cos.\frac{qt}{\sqrt{aP}}.e^{-t^2}$$

les limites de t étant $t=0$, $t=\infty$. Mais entre les li-

mites $x=0$, $x=\infty$ il est démontré (*Voyez Exercices de Calcul intégral de* LEGENDRE *p.* 362), que

$$\int dx.e^{-x^2}\cos.ax=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{-\frac{a^2}{4}}$$

donc l'on aura

$$y=\frac{(2n)^P}{2\sqrt{\pi a P}}.e^{-\frac{q^2}{4aP}},$$

ou bien

$$y=\frac{(2n)^P.\sqrt{3}}{\sqrt{\pi P(n+1)(2n+2)}}.e^{\frac{-3q^2}{P(n+1)(2n+1)}}$$

en substituant pour a sa valeur.

Cette formule nous fait voir que la probabilité d'amener la somme q diminue à mesure que q augmente. Au reste, si l'on suppose $q=0$, la valeur de y s'accorde avec celle trouvée dans le N.° 3 pour le même cas.

Relativement au cas où n est aussi un nombre très-grand la probabilité de la somme q sera

$$\frac{1}{n}.\sqrt{\frac{3}{2\pi P}}.e^{-\frac{3q^2}{2n^2P}}.$$

6. Nous avons supposé dans la solution du problème précédent $q<P$, mais rien n'empêche de supposer $q>P$. Pour trouver dans cette hypothèse un résultat convergent, il est nécessaire de varier le procédé d'intégration de manière à ce que l'on puisse éviter la réduction en série du facteur $\cos.q\varpi$.

En substituant dans la formule (5) à la place de

$$\left(\cos.\varpi+\cos.2\varpi\ .\ .\ .+\cos.n\varpi\right)^{\mathrm{P}}$$

sa valeur

$$n^{\mathrm{P}}\ .\left(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.}\right)^{\mathrm{P}}$$

trouvée dans le N.° 3, nous aurons

$$y=\frac{(2n)^{\mathrm{P}}}{\pi}\int d\varpi.\cos.q\varpi\left(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.}\right)^{\mathrm{P}}.$$

Pour éviter l'élévation à la puissance P du polynome, remarquons que l'on a

$$\left(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.}\right)^{\mathrm{P}}=e^{\mathrm{P}\log.(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.})}$$

et en développant la fonction logarithmique

$$\left(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.}\right)^{\mathrm{P}}=e^{-\mathrm{P}a\varpi^2}\ e^{\mathrm{P}\varpi^4\left(\frac{2b-a^2}{2}\right)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

ou bien

$$\left(1-a\varpi^2+b\varpi^4-\text{etc.}\right)^{\mathrm{P}}=e^{-a\mathrm{P}\varpi^2}\left(1+\mathrm{P}\left(\frac{2b-a^2}{2}\right)\varpi^4+\text{etc.}\right)$$

Il suit de là qu'en faisant $x=\varpi\sqrt{a\mathrm{P}}$, l'on aura

$$y=\frac{(2n)^{\mathrm{P}}}{\pi\sqrt{a\mathrm{P}}}\int dx.\cos.\frac{qx}{\sqrt{a\mathrm{P}}}.e^{-x^2}\left\{1+\left(\frac{2b-a^2}{2}\right)\frac{x^4}{a^2\,\mathrm{P}}+\text{etc.}\right).$$

et puisque P est supposé très-grand, l'on pourra pren-

dre $x=0$, $x=\infty$ pour limites de l'intégrale, ce qui donnera (*Voyez Fxercices de Calcul Intégral p.* 363)

$$y=\frac{(2n)^{\mathrm{P}}}{2\sqrt{\pi a\mathrm{P}}}\cdot e^{-\frac{q^2}{4a\mathrm{P}}}\cdot\left\{1+\frac{(2b-a^2)}{8\mathrm{P}a^2}\left(3-\frac{3q^2}{a\mathrm{P}}+\frac{q^4}{4a^2\,\mathrm{P}^2}\right)\right\}$$

Si l'on conserve seulement le premier terme de cette formule l'on aura pour y la même valeur que nous avons trouvé précédemment.

7. Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le N.° 7, prouve que l'on a

$$y=\frac{1}{\pi}\int d\varpi\cos.q\varpi\left(1+2\cos.\varpi+2\cos.2\varpi\ldots+2\cos.n\varpi\right)$$

lorsque le dé est composé de $2n+1$ faces parmi lesquelles il y en a une marquée avec un zéro; les limites de l'intégrale étant toujours $\varpi=0$, $\varpi=180°$.

Par une analyse exactement conforme à celle du N.° précédent l'on trouve

$$y=\frac{(1+2n)^{\mathrm{P}}}{2\sqrt{\pi\mathrm{P}a'}}\cdot e^{-\frac{q^2}{4a'\mathrm{P}}}\left\{1+\frac{(2b'-a'^2)}{8\mathrm{P}a'^2}\left(3-\frac{3q^2}{a'\mathrm{P}}+\frac{q^4}{4a'^2\,\mathrm{P}^2}\right)\right\}$$

$$a'=\frac{1}{1.2}\,\frac{2\mathrm{S}'}{1+2n}\,;\; b'=\frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{2\mathrm{S}''}{1+2n}.$$

Le premier terme de cette formule donne

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi\mathrm{P}n.(n+1)}}\cdot e^{-\frac{3q^2}{2\mathrm{P}n(n+1)}}$$

pour la probabilité demandée : Et si n est un nombre très-grand, elle se réduit à

$$\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{3}{2\pi P}}\cdot e^{\frac{-3q^2}{2Pn^2}} \quad \ldots\ldots (A)$$

comme dans le cas du N.° 5.

8. Pour faire une application de cette formule, imaginons un centre d'attraction placé dans un point fixe qui agit sur un nombre P de corps dont chacun a reçu une impulsion. L'on sait que ces corps décriront des courbes planes différemment inclinées par rapport à un plan de position déterminée, et en supposant les impulsions données au hasard, toutes les inclinaisons seront également probables. Dans cette hypothèse il est curieux de chercher la probabilité qu'il y pour que la somme des inclinaisons des orbites soit renfermée entre les limites données $-\psi$ et $+\psi$.

Si l'on prend le supplément des inclinaisons qui sont plus grandes qu'un angle droit, toutes les orbites pourront être considérées comme renfermées entre deux plans qui se coupent à angle droit : Concevons maintenant cet angle droit partagé en deux parties égales, et fixons l'origine de la numération des angles au point qui correspond à 50^g ; par là une inclinaison de 57^g, par exemple, deviendra de 7^g, d'après cette manière de compter, et une inclinaison de 40^g sera exprimée par -10^g. D'où il suit que toutes les inclinaisons seront comprises entre -50^g et $+50^g$. Or, si l'on suppose les 50^g positifs aussi bien que les 50^g négatifs partagés dans un nombre infiniment grand de parties

égales exprimé par n, il est clair que la formule (A) du N.° précédent donnera la probabilité pour que la somme des inclinaisons soit q, puisque le problême dont nous parlons rentre dans celui d'un nombre P de dés ayant chacun $2n+1$ faces.

La probabilité pour que la somme des inclinaisons soit renfermée entre zéro et $+\Psi$ sera donc

$$\frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\pi P}}\, S \,.\, e^{\frac{-3q^2}{2Pn^2}}.$$

Le signe S des intégrales finies s'étendant à toutes les valeurs de q depuis $q=0$ jusqu'à $q=+\Psi$: Et comme cette somme reste la même pour les valeurs négatives de q comprises entre zéro et $-\Psi$ l'on aura

$$\frac{2}{n} \sqrt{\frac{3}{2\pi P}} \,.\, S\, e^{\frac{-3q^2}{2Pn^2}}$$

pour la probabilité que la somme des inclinaisons soit renfermée entre $-\Psi$ $+\Psi$. Soit $\frac{q}{n}=x$ et $\frac{\Psi}{n}=$ B: Le changement des valeurs successives de x étant la fraction infiniment petite $\frac{1}{n}$, l'on pourra supposer $\frac{1}{n}=dx$, et changer le signe S des intégrales finies en celui des intégrales infiniment petites, de sorte que l'on aura

$$\sqrt{\frac{6}{\pi P}} \cdot \int dx \,.\, e^{\frac{-3x^2}{2P}} \;\ldots\ldots\; (b)$$

pour la probabilité demandée, les limites de l'intégration par rapport à x étant $x=0$ et $x=B$.

Appliquons cette formule aux Comètes. Le nombre de celles que l'on a observées jusqu'en 1807 inclusivement est de 97. La somme des inclinaisons de toutes ces orbites comptées chacune depuis 0^g jusqu'à 100^g, s'élève à 5032^g, 033 : Et cette même somme comptée, comme nous l'avons dit, sera

$$5032^g,033 - 97 \times 50 = 182^g,033.$$

Nous avons donc $P=97$; $\Psi = 182^g,033$;

$B = \frac{\Psi}{n} = \frac{182,033}{50} = 3,6406$. Avec ces nombres la formule (b) devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dx' \cdot e^{-x'^2}$$

en posant $x' = x \cdot \sqrt{\frac{3}{2P}}$. Les limites de x' sont $x'=0$ $x'=0,45273$; Substituant cette valeur de x' dans la série

$$\int dx' \cdot e^{-x'^2} = x' - \frac{1}{1.2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

l'on trouvera

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dx' \cdot e^{-x'^2} = 0,4934.$$

La division de 182,033 par 97 donne $1.^g,87663$. La fraction 0,4934 exprime donc la probabilité que l'inclinaison moyenne des 97 Comètes observées sera comprise entre les limites $50^g \pm 1^g,87663$, en admettant

toutes les inclinaisons également probables. Il est donc très-vraisemblable que l'hypothèse d'une égale facilité d'inclinaison pour ces astres est celle de la nature, puisque la fraction 0,4934 n'est pas assez petite pour la faire rejeter. Le résultat précédent s'accorde avec celui que LAPLACE a donné dans les Mémoires de l'Institut, année 1809, pag. 374.

9. Passons actuellement à la solution d'un problême beaucoup plus général que les précédentes. Soit $2n$ le nombre des faces de chaque dé, et p le nombre de ces dés que l'on a jetés au hasard. Nommons

$$\mathcal{E}' ; \mathcal{E}'' ; \mathcal{E}''' ; \ldots\ldots \mathcal{E}^{(p)}$$

les nombres marqués sur les faces respectives de ces dés, et supposons chacun de ces nombres multiplié par celui qui lui correspond dans la suite

$$q' ; q'' ; q''' ; \ldots\ldots q^{(p)} ;$$

l'on demande la probabilité qu'il y a pour que la somme

$$q'\mathcal{E}' + q''\mathcal{E}'' + q''' \ldots\ldots + q^{(p)}\mathcal{E}^{(p)} \ldots\ldots (\mathrm{B})$$

de ces produits soit égale à une quantité donnée q.

L'on suppose q', q'', $q''' \ldots q^{(p)}$ nombres entiers.

Désignons par X′ ce que devient le polynome X posé dans le N.° 1, lorsque l'on élève chacun de ses termes à la puissance q', l'on aura

$$\mathrm{X}' = x^{-q'n} + x^{-q'(n-1)} \ldots\ldots + x^{-2q'} + x^{-q'} + x^{q'} + x^{2q'} \ldots\ldots$$
$$+ x^{q'(n-1)} + x^{q'n} .$$

Soient X'', X'''. . . . . $X^{(p)}$ les valeurs successives que prend ce polynome par le changement de q' en q''; q'' en q''' et ainsi de suite jusqu'à $q^{(p)}$. Il est clair, par la théorie des combinaisons, que le problême dont il s'agit se réduit à déterminer le coëfficient de x^q qui se trouve dans le développement de la fonction

$X'.X''.X'''.\ldots.X^{(p)}$. Or en posant $x=e^{\varpi\sqrt{-1}}$ l'on a

$$X'=2\cos.q'\varpi+2\cos.2q'\varpi\ldots\ldots+2\cos.nq'\varpi,$$

ou bien

$$X'=2S.\cos.nq'\varpi$$

en étendant le signe S des intégrales finies à toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à n inclusivement; donc le coëfficient de x^q sera égal à la moitié du coëfficient de $\cos.q\varpi$ résultant du développement de la fonction

$$2^p.\,S\cos.nq'\varpi.\,S\cos.nq''\varpi\ldots\ldots S\cos.nq^{(p)}\varpi,$$

ou, ce qui revient au même, il sera égal au terme indépendant de ϖ de la fonction

$$2^p.\cos.q\varpi.\,S\cos.nq'\varpi.\,S\cos.nq''\varpi\ldots\ldots S\cos.nq^{(p)}\varpi.$$

Il suit de là qu'en nommant y le coëfficient de x^q, l'on aura

$$y=\frac{2^p}{\pi}\int d\varpi\cos.q\varpi.\,S\cos.nq'\varpi.\,S\cos.nq''\varpi\ldots\ldots S\cos.aq^{(p)}\varpi$$

en intégrant depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$.

Cela posé, si l'on développe les fonctions soumises au signe S suivant les puissances de ϖ, l'on aura

$$S \cos. nq'\varpi = n . \left\{ 1 - aq'^2 \varpi^2 + bq'^4 \varpi^4 - \text{etc.} \right\};$$

$$S \cos. nq''\varpi = n . \left\{ 1 - aq''^2 \varpi^2 + bq''^4 \varpi^4 - \text{etc.} \right\};$$

. . . .

$$S \cos. nq^{(p)}\varpi = n . \left\{ 1 - aq^{(p)2} \varpi^2 + bq^{(p)4} \varpi^4 - \text{etc.} \right\};$$

où les valeurs de a, b, etc. sont connues par le N.° 3.

Maintenant, si l'on forme la somme des logarithmes des seconds membres de ces équations, l'on aura

$$\log. S \cos. nq'\varpi + \log. S \cos. nq''\varpi \ldots + \log. S \cos. nq^{(p)}\varpi$$

$$= \log. n^p - a\varpi^2 \text{P} + \left(\frac{2b - a^2}{2}\right) \varpi^4 \text{P}' - \text{etc.}\ e$$

en faisant

$$\text{P} = q'^2 + q''^2 + q'''^2 \ldots\ldots + q^{(p)2};$$

$$\text{P}' = q'^4 + q''^4 + q'''^4 \ldots\ldots + q^{(p)4}.$$

La valeur de y pourra donc être mise sous cette forme

$$y = \frac{(2n)^p}{\pi} \int d\varpi . \cos. q\varpi . e^{-a\varpi^2 \text{P}} . e^{\frac{(2b - a^2)}{2} \text{P}'\varpi^4} \ldots\ldots$$

ou bien, sous celle-ci,

$$y = \frac{(2n)^p}{\pi} \int d\varpi \cos. q\varpi . e^{-a\varpi^2 \text{P}} . \left\{ 1 + \frac{(2b - a^2) \text{P}'\varpi^4}{2} + \text{etc.} \right\}.$$

Cette valeur de y est semblable à celle que nous avons trouvé dans le N.° 6, par conséquent on pourra l'intégrer par le même procédé, ce qui donnera

$$y = \frac{(2n)^p}{2\sqrt{a\pi P}} . e^{\frac{-q^2}{4aP}} \left\{ 1 + \frac{(2b - a^2)}{8a^2} . \frac{P_1}{P^2} \left(3 - \frac{3q^2}{aP} + \frac{q^4}{4a^2 P^2} \right) \right\},$$

ou simplement

$$y = \frac{(2n)^p . \sqrt{3}}{\sqrt{\pi P (n+1)(2n+1)}} . e^{\frac{3q^2}{P(n+1)(2+1)}}$$

en prenant seulement le premier terme de cette formule. En changeant arbitrairement les signes des multiplicateurs q', q'', etc. la valeur précédente de y restera toujours la même, puisque P, P′ sont formés par des puissances paires de ces multiplicateurs.

D'après ce que l'on a vu dans les cas précédens, l'on comprendra sans difficulté que si le nombre des faces est impair, l'on doit avoir

$$y = \frac{(1+2n)^p}{2\sqrt{\pi a' P}} . e^{\frac{-q^2}{4a'P}} . \left\{ 1 + \frac{(2b' - a'^2)}{8a'^2} \frac{P'}{P^2} \left(3 - \frac{3q^2}{a'P} + \frac{q^4}{4a'^2 P^2} \right) \right\}$$

les valeurs de a' et b' étant celles que l'on trouve au N.° 7. Le premier terme de cette formule donne

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi P n (n+1)}} . e^{\frac{-3q^2}{2n(n+1)P}}$$

pour la probabilité demandée, laquelle se réduit à

$$\frac{1}{n} . \sqrt{\frac{3}{2\pi P}} . e^{\frac{-3q^2}{2P.n^2}}$$

dans l'hypothèse très-grand. Ici, si l'on fait

$\frac{q}{n} = x$; $\frac{1}{n} = dx$; $\frac{\Psi}{n} = k$ l'on aura

$$\sqrt{\frac{6}{\pi P}} \cdot \int dx \cdot e^{\frac{-3x^2}{2P}}$$

pour la probabilité que la valeur de la fonction (B) sera comprise entre les limites $\mp \Psi$. Les limites de l'intégrale étant $x = -k$; $x = +k$.

10. Le problême que nous venons de résoudre peut être rendu plus général en demandant la probabilité qu'il y a pour satisfaire en même tems aux deux équations

$$q'\mathcal{E}' + q''\mathcal{E}'' + q'''\mathcal{E}''' \ldots\ldots + q^{(p)}\mathcal{E}^{(p)} = Q ;$$
$$q_{,}\mathcal{E}' + q_{,,}\mathcal{E}'' + q_{,,,}\mathcal{E}''' \ldots\ldots + q^{(p)}\mathcal{E}_{(p)} = Q ;$$

Soit

$$\begin{aligned} X' = {} & x^{-nq'} \cdot y^{-nq_{,}} + x^{-(n-1)q'} \cdot y^{-(n-1)q_{,}} \ldots\ldots\ldots \\ & + x^{-2q'} \cdot y^{-2q_{,}} + x^{-q'} \cdot y^{-q_{,}} + x^{q'} \cdot y^{q_{,}} + x^{2q'} \cdot y^{2q_{,}} \ldots \\ & + x^{(n-1)q'} \cdot y^{(n-1)q_{,}} + x^{nq'} \cdot y^{nq_{,}} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'' = {} & x^{-nq''} \cdot y^{-nq_{,,}} \ldots + x^{-2q''} \cdot y^{-2q_{,,}} + x^{-q''} \cdot + x^{+q''} \cdot y^{+q_{,,}} \\ & + x^{2q''} \cdot y^{2q_{,,}} \ldots\ldots + x^{nq''} \cdot y^{nq_{,,}} ; \end{aligned}$$

etc.

Si l'on suppose développée la fonction $X' . X'' . X''' \ldots X^{(p)}$ il est clair que la probabilité demandée sera donnée par le coëfficient de $x^{Q} . y^{Q'}$, qui se trouve dans ce déve-

loppement. Mais si l'on fait

$$x=e^{\varpi\sqrt{-1}}\ ;\ y=e^{\varpi'\sqrt{-1}}$$

l'on a

$$X'=2S\cos.n\left(q'\varpi+q_{,}\varpi'\right);\ X''=2S\cos.n\left(q''\varpi+q_{,,}\varpi'\right);\ \text{etc.}$$

donc le coëfficient de $x^{Q}.y^{Q'}$ est égal au terme indépendant de ϖ et de ϖ' qui se trouve dans le produit

$$\cos.\left(Q\varpi+Q'\varpi'\right)X'.X''.X'''.\ .\ .\ .\ .\ X^{(p)}.$$

A' l'exclusion du terme indépendant de ϖ et de ϖ' il est évident qu'un terme quelconque de ce produit doit avoir l'une ou l'autre de ces trois formes

$$A\cos.\left(\alpha\varpi+\beta\varpi'\right),\ B\cos.M\varpi,\ C\cos.N\varpi'.$$

Or, en multipliant les deux premières de ces fonctions par $d\varpi$ et les intégrant depuis $\varpi=-\pi$ jusqu'à $\varpi=\pi$ l'on a zéro pour résultat; de même en multipliant la troisième par $d\varpi'$ et intégrant entre les mêmes limites l'on a encore zéro; donc si l'on nomme z le coëfficient de $x^{Q}.y^{Q'}$ l'on aura entre les limites prescrites

$$z=\frac{1}{4\pi^2}\int d\varpi'\int d\varpi\cos.\left(Q\varpi+Q'\varpi'\right).X'.X''.X'''...X^{(p)},$$

puisque par cette double intégration tous les termes disparaissent, excepté celui qui est indépendant de ϖ et de ϖ'. Maintenant par un calcul analogue à celui du N.° précédent, l'on trouvera

$$X'.X''.X'''.\ldots.X^{(p)} = (2n)^p \cdot e^{-aP} \cdot e^{\frac{(2b^2-a^2)P'}{2}}$$

en posant

$$P = \left(q'\varpi+q_{,}\varpi'\right)^2 + \left(q_{,,}\varpi+q_{,,}\varpi'\right)^2 \ldots + \left(q^{(p)}\varpi+q_{(p)}\varpi'\right)^2;$$

$$P' = \left(q'\varpi+q_{,}\varpi'\right)^4 + \left(q''\varpi+q_{,,}\varpi'\right)^4 \ldots + \left(q^{(p)}\varpi+q_{(p)}\varpi'\right)^4;$$

etc.

Et si l'on fait

$$A = q'^2 + q''^2 + q'''^2 \ldots\ldots + q^{(p)2};$$

$$B = q'q_{,} + q''q_{,,} + q'''q_{,,,} \ldots\ldots + q^{(p)}q_{(p)};$$

$$C = q_{,}^2 + q_{,,}^2 + q_{,,,}^2 \ldots\ldots + q_{(p)}^2,$$

l'on aura

$$z = \frac{(2n)^p}{4\pi^2}\int d\varpi' \int d\varpi.\cos.\left(Q\varpi+Q'\varpi'\right).\, e^{-(aA\varpi^2+2aB\varpi.\varpi'+Ca'\varpi'^2)}$$

en omettant le facteur $\frac{(2b^2-a^2)P'}{2}$ qui ne produit que des termes très-petits dans le résultat de l'intégration.

Si l'on fait

$$x = \varpi\sqrt{ap}\,; \quad x' = \varpi'\sqrt{ap}$$

la valeur précédente de z devient

$$z = \frac{(2n)^p}{4a\pi p^2}\int dx' \int dx\cos.\left(\frac{Qx}{\sqrt{ap}}+\frac{Q'x'}{\sqrt{ap}}\right).\, e^{-\frac{A.x^2}{p}-\frac{2Bxx'}{p}-\frac{C.x'^2}{p}}$$

les limites de x et de x' étant $-\infty$ et $+\infty$ puisque l'on suppose p très-grand.

Pour rendre possible la double intégration par les méthodes connues, substituons à la place du cosinus sa valeur exponentielle, nous aurons

$$z = \frac{(2n)^p}{2.4ap\pi^2}\int dx' \int dx.e^{-(\alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma xx' + x + \delta \mathcal{E} x')}$$

$$+ \frac{(2n)^p}{2.4ap\pi^2}\int dx' \int dx.e^{-(\alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma xx' - \delta x - \mathcal{E} x')}$$

en faisant, pour plus de simplicité,

$$\alpha = \frac{A}{p};\ \beta = \frac{C}{p};\ \gamma = \frac{2B}{p};\ \delta = \frac{Q\sqrt{-1}}{\sqrt{ap}};\ \mathcal{E} = \frac{Q'\sqrt{-1}}{\sqrt{ap}}.$$

Maintenant il faut transformer l'exposant

$$\alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma xx' + \delta x + \mathcal{E} x' = Y$$

du nombre e dans un autre renfermant seulement les quarrés des deux variables. Pour cela l'on posera

$$x = u - \frac{\gamma}{2\alpha} u' + f; \qquad x' = u' - h;$$

$$f = \frac{\gamma\mathcal{E} - 2\beta\delta}{4\alpha\beta - \gamma^2}; \qquad h = \frac{2\alpha\mathcal{E} - \gamma\delta}{4\alpha\beta - \gamma^2};$$

et l'on aura

$$Y = \alpha u^2 + \left(\frac{4\alpha\beta - \gamma^2}{4\alpha}\right).u'^2 + H;$$

$$H = \frac{\alpha\mathcal{E}^2\gamma^2 + \beta\gamma^2\delta^2 - \mathcal{E}\delta\gamma^3 - 4\alpha\beta^2\delta^2 - 4\alpha^2\mathcal{E}^2 + 4\alpha\beta\gamma\delta\mathcal{E}}{(4\alpha\beta - \gamma^2)^2}.$$

Substituant à la place de α, β, γ, δ, $\mathcal{E}$ leurs valeurs l'on trouvera, après les réductions,

$$Y = \frac{A}{p}.u^2 + \left(\frac{AC - B^2}{pA}\right).u'^2 + H;$$

$$H = \frac{CQ^2 - 2BQQ' + AQ'^2}{4a(AC - B^2)}.$$

Il suit de là qu'en posant

$$E = AC - B^2$$

l'on aura

$$\int dx' \int dx . e^{-Y} = \int du' \int du . e^{\frac{-A.u^2}{p}} . e^{\frac{-E.u'^2}{Ap}} . e^{-H}$$

les limites de u et de u' étant les mêmes que celles de x et de x'. Or l'on sait que depuis $x = -\infty$, jusqu'à $x = +\infty$, l'on a

$$\int dx . e^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$

donc

$$\int dx' \int dx . e^{-Y} = e^{-H} . \frac{\pi p}{\sqrt{E}}.$$

Pour peu que l'on examine la première transformée de Y l'on comprendra qu'à l'égard de la fonction

$$\alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma x x' - \delta x - \varepsilon x' = Y'$$

l'on doit encore avoir

$$\int dx' \int dx . e^{-Y'} = e^{-H} \frac{\pi p}{\sqrt{E}}.$$

En réunissant ces deux intégrales, l'on aura enfin

$$z = \frac{(2n)^p}{4a\pi\sqrt{E}} . e^{\frac{-1}{4aE}\left(CQ^2 - 2BQQ' + AQ'^2\right)} \quad \ldots (a')$$

ou bien

$$z = \frac{3(2n)^p}{\pi(n+1)(2n+1)\sqrt{E}} \cdot e^{\frac{-3(CQ^2 - BQQ' + AQ'^2)}{E(n+1)(2n+1)}}$$

en substituant pour a sa valeur (N.° 3).

Relativement au cas où le nombre des faces de chaque dé serait égal à $2n+1$ l'on aurait

$$z = \frac{3(1+2n)^p}{2\pi n(n+1)\sqrt{E}} \cdot e^{\frac{-3(CQ^2 - 2BQQ' + AQ'^2)}{2.En.(n+1)}}.$$

11. La même méthode s'applique au cas où il s'agit de déterminer la probabilité qu'il y a pour satisfaire en même tems aux trois équations suivantes,

$$q'\mathcal{E}' + q''\mathcal{E}'' + q'''\mathcal{E}''' \ldots\ldots + q^{(p)}\mathcal{E}^{(p)} = Q$$
$$q_{,}\mathcal{E}' + q_{,,}\mathcal{E}'' + q_{,,,}\mathcal{E}''' \ldots\ldots + q_{(p)}\mathcal{E}^{(p)} = Q'$$
$$r'\mathcal{E}' + r''\mathcal{E}'' + r'''\mathcal{E}''' \ldots\ldots + r^{(p)}\mathcal{E}^{(p)} = Q''.$$

Par des considérations absolument semblables à celles du N.° précédent, l'on trouverait que dans ce cas l'on doit avoir

$$z = \frac{1}{8\pi^3}\int d\varpi''\int d\varpi'\int d\varpi \cos.\left(Q\varpi + Q'\varpi' + Q''\varpi''\right)X'X''\ldots X^{(p)}.$$

$$X' = 2\,S.\cos.n\left(q'\varpi + q_{,}\varpi' + r'\varpi''\right);$$

$$X'' = 2\,S.\cos.n\left(q'\varpi' + q_{,,}\varpi' + r''\varpi''\right);$$

etc.

les limites des intégrales étant toujours $\varpi = \varpi' = \varpi'' = -\pi$; $\varpi = \varpi' = \varpi'' = +\pi$. Maintenant si l'on transforme le pro-

duit $X'X''X'''\ldots\ldots X^{(p)}$ à la manière ordinaire l'on aura, en retenant seulement le premier terme,

$$z=\frac{(2n)^p}{8\pi^3}\int d\varpi''\int d\varpi'\int d\varpi.\cos.\left(Q\varpi+Q'\varpi'+Q''\varpi''\right).e^{-aP}$$

$$P=\left(q'\varpi+q_{,}\varpi'+r'\varpi''\right)^2+\left(q''\varpi+q_{,,}\varpi'+r''\varpi''\right)^2\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(q^{(p)}\varpi+q_{(p)}\varpi'+r^{(p)}\varpi''\right).$$

Faisons

$$x=\varpi\sqrt{ap}\;;\;x'=\varpi'\sqrt{ap}\;;\;x''=\varpi''\sqrt{ap}$$

$$A=q'^2+q''^2+q'''^2\ldots\ldots+q^{(p)2};$$

$$B=q_{,}^2+q_{,,}^2+q_{,,,}^2\ldots\ldots+q_{(p)}^2;$$

$$C=r'^2+r''^2+r'''^2\ldots\ldots+r^{(p)2};$$

$$D=q'q_{,}+q''q_{,,}+q'''q_{,,,}\;\ldots+q^{(p)}q_{,(p)};$$

$$E=q'r'+q''r''+q'''r'''\ldots+q^{(p)}r^{(p)};$$

$$F=q_{,}r'+q_{,,}r''+q_{,,,}r'''\ldots+q_{(p)}r^{(p)};$$

l'on aura

$$pP=Ax^2+Bx'^2+Cx''^2+2Dxx'+2Exx''+2Fx'x'';$$

$$z=\frac{(2n)^p}{8\pi^3}\int dx''\int dx'\int dx.\cos.\left(\frac{Qx}{\sqrt{ap}}+\frac{Q'x'}{\sqrt{ap}}+\frac{Q''x''}{\sqrt{ap}}\right).e^{-\frac{P}{p}}.$$

Si l'on fait $\alpha=\frac{A}{p}$; $\beta=\frac{B}{p}$; $\gamma=\frac{C}{p}$; $\delta=\frac{2D}{p}$;

$\varepsilon=\frac{2E}{p}$; $\zeta=\frac{2F}{p}$; $\vartheta=\frac{Q\sqrt{-1}}{\sqrt{ap}}$; $\theta=\frac{Q'\sqrt{-1}}{\sqrt{ap}}$; $\tau=\frac{Q''\sqrt{-1}}{\sqrt{ap}}$,

$$X = \alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma x''^2 + \delta x x' + \varepsilon x x'' + \zeta x' x'' + \vartheta x + \theta x' + \tau x'';$$

$$Y = \alpha x^2 + \beta x'^2 + \gamma x''^2 + \delta x x' + \varepsilon x x'' + \zeta x' x'' - \vartheta x - \theta x' - \tau x'';$$

et qu'à la place du cosinus l'on substitue sa valeur exponentielle, l'on aura

$$z = \frac{(2n)^p}{2.8\pi^3}\int dx''\int dx'\int dx . e^{-X} + \frac{(2n)^p}{2.8\pi^3}\int dx''\int dx'\int dx . e^{-Y}.$$

Pour rendre possibles ces intégrations, il faut transformer les fonctions X, Y dans d'autres qui renferment seulement les quarrés des variables. Voici l'indication de ce calcul pour X. L'on posera

$$x = u + Ku' + gu'' + h;$$

$$x' = u' + mu'' + f;$$

$$x'' = u' - b$$

et l'on aura pour déterminer les coëfficiens k, g, h, m, f, b les équations suivantes;

$$2\alpha k + \delta = 0$$

$$g = \frac{\delta\zeta - 2\beta\varepsilon}{4\alpha\beta - \delta^2};$$

$$m = \frac{\varepsilon\delta - 2\alpha\zeta}{4\beta\alpha - \delta^2};$$

$$b = \frac{\vartheta\delta\zeta + \theta\varepsilon\delta - \tau\delta^2 - 2\beta\vartheta\varepsilon - 2\alpha\zeta\theta + 4\alpha\beta\tau}{2\varepsilon\delta\zeta - 2\gamma\delta^2 - 2\beta\varepsilon^2 - 2\alpha\zeta^2 + 8\alpha\beta\gamma};$$

$$f\left(4\alpha\beta - \delta^2\right) - b\left(2\alpha\zeta - \delta\varepsilon\right) + 2\alpha\theta - \vartheta\delta = 0; \ldots (\text{I})$$

$2\alpha h + \delta f - b\varepsilon + \eta = 0$ . . . . (II)

d'après lesquelles la valeur de X se réduit à

$$X = \alpha u^2 + Gu'^2 + Hu''^2 + N$$

en posant

$$G = \frac{4\alpha\beta - \delta^2}{4\alpha};$$

$$H = \frac{\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\zeta\delta^3 + \gamma\delta^4 - \beta\varepsilon^2\delta^2 - \alpha\delta^2\zeta^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta^2 - 4\alpha\beta\delta\varepsilon\zeta \\ + 4\beta\alpha^2\zeta^2 + 4\alpha\beta^2\varepsilon^2 + 16.\gamma\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\zeta^2 - 2\beta\varepsilon^2 \end{array}\right\}}{(4\alpha\beta - \delta^2)^2}.$$

$$N = \alpha h^2 + \beta f^2 + \gamma b^2 + \delta fh - \varepsilon bh - \zeta bf + \eta h + \theta f - \tau h.$$

En tranformant Y de la même manière l'on aura le même résultat que celui que nous venons d'obtenir pour X ; ainsi en effectuant les intégrations depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, l'on aura

$$z = \frac{(2n)^p \, . \, e^{-N}}{8\pi\sqrt{\pi} \, . \sqrt{\alpha GH}}.$$

Pour mieux connaître la forme de la fonction N développons davantage les équations précédentes.

En substituant dans la valeur de b à la place de α, β, etc. leurs valeurs l'on trouve

$$b = \frac{1}{2} . \sqrt{\frac{p}{a}} . \sqrt{-1} . \left\{ \frac{IQ'' + I'Q' + I''Q}{IC + I'F + I''E} \right\}$$

en faisant

$$I = AB - D^2 \; ; \; I' = DE - AF ; \; I'' = DF - BE.$$

Les mêmes substitutions changent les équations (I) et (II) en celles-ci ;

$$\mathrm{I}f+\mathrm{I}'b+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\cdot\left(\mathrm{AQ}'-\mathrm{DQ}\right)=0$$

$$\mathrm{A}h+\mathrm{D}f-\mathrm{E}b+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\;\mathrm{Q}=0\,.$$

Il suit de là que si l'on pose

$$\mathrm{M}=\frac{\mathrm{IQ}''+\mathrm{I}'\mathrm{Q}'+\mathrm{I}''\mathrm{Q}}{\mathrm{IC}+\mathrm{I}'\mathrm{F}+\mathrm{I}''\mathrm{E}}\,;$$

$$\mathrm{M}'=\mathrm{AQ}'-\mathrm{DQ}+\mathrm{MI}'\,;$$

$$\mathrm{M}''=\mathrm{BQ}-\mathrm{Q}'\mathrm{D}+\mathrm{MI}''$$

l'on aura

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\cdot\mathrm{M}\,;\quad f=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{I}}\,;$$

$$h=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{I}}\,.$$

Or nous avons

$$\mathrm{PN}=-\mathrm{A}h^2+\mathrm{B}f^2+\mathrm{C}b^2-2\mathrm{F}bf$$

$$+\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\cdot\mathrm{Q}'f-\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\sqrt{-1}\cdot\mathrm{Q}''h$$

donc par la substitution des valeurs de b, f, h, l'on aura

$$4a\mathrm{IN}=\mathrm{AQ}'^2+\mathrm{BQ}^2-2\mathrm{DQQ}'+2\mathrm{DQ}'\mathrm{Q}''-2\mathrm{BQQ}''$$

$$+2\,\mathrm{M}\left(\mathrm{QI}'-\mathrm{Q}''\mathrm{I}'+\mathrm{QI}''\right)-\mathrm{M}^2\left(\mathrm{CI}+\mathrm{FI}'+\mathrm{EI}''\right)$$

ou bien

$$4a\mathrm{IN} = \mathrm{AQ}'^2 + \mathrm{BQ}^2 - 2\mathrm{DQQ}' + 2\mathrm{DQ}'\mathrm{Q}'' - \mathrm{BQQ}''$$
$$+ \frac{2\mathrm{Q}'\mathrm{Q}''.\mathrm{I}'\mathrm{I}'' - 2\mathrm{QQ}''\mathrm{I}''^2 + 2\mathrm{QQ}'\mathrm{I}'\mathrm{I}'' + \mathrm{Q}'^2\mathrm{I}'^2 + \mathrm{Q}^2\mathrm{I}''^2 - \mathrm{Q}''^2(\mathrm{I}^2 + 2\mathrm{I}'\mathrm{I}'')}{\mathrm{IC} + \mathrm{I}'\mathrm{F} + \mathrm{I}''\mathrm{E}}$$

en remplacant M par sa valeur.

L'on voit par cette équation que la valeur de N est une fonction homogène de la seconde dimension par rapport à Q, Q', Q'', ce qui est analogue à ce qui a lieu pour H dans le problème du N.° précédent.

12. Dans tous les problèmes résolus jusqu'ici nous avons supposé que le polyèdre qui nous a servi d'exemple avait un nombre de faces marquées par chacun des nombres de la suite 0; ± 1; ± 2; $\pm 3 \ldots \pm n$. Mais l'on peut généraliser la question en l'énonçant ainsi : Soit h le nombre total des faces du polyèdre; nommons a le nombre de ces faces marquées avec un zéro; $2a'$ le nombre de celles marquées, moitié avec l'unité positive, et moitié avec l'unité négative; $2a''$ le nombre de celles marquées moitié $+2$, et moitié -2; en continuant de la même manière l'on formera l'équation

$$a + 2a' + 2a'' + 2a''' \ldots + 2a^{(n)} = h \ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Cela posé, proposons-nous de résoudre avec ce changement de circonstances le même problème que nous avons énoncé au commencement du N.° 9.

Il est clair qu'ici il faudra considérer le polynome

$$\mathrm{X}' = a^{(n)}.x^{-nq'} + a^{(n-1)}.x^{-(n-1)q'} \ldots + a''x^{-2q'} + a'x^{-q'} + ax^0$$
$$+ a'x^{q'} + a''x^{2q'} \ldots + a^{(n)}\,x^{nq'}$$

et déterminer le coëfficient de x^q résultant du développement de la fonction $X'.X''.X'''...X^{(p)}$; X''; $X'''...X^{(p)}$ étant les valeurs successives, que prend X' par le changement de q' en q'', $q'''...q^{(p)}$. En faisant, comme dans les cas précédens, $x = e^{\varpi\sqrt{-1}}$, l'on aura

$$X' = a + 2a'.\cos.q'\varpi + 2a''.\cos.2q'\varpi..... + 2a^{(n)}.\cos.nq'\varpi.$$

Il n'est pas nécessaire de répéter ici le raisonnement que nous avons déjà fait pour comprendre qu'en nommant y le coëfficient cherché l'on doit avoir

$$y = \frac{1}{\pi}\int d\varpi\cos.q\varpi.X'.X''.X''.....X^{(p)}$$

en intégrant depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$.

Développant X' suivant les puissances de ϖ l'on aura

$$X' = h.\left(1 - \frac{h'}{h}.\varpi^2 + \frac{h''}{h}\varpi^4 + \text{etc.}\right)$$

en posant

$$a' + a''.2^2 + a'''.3^2 ... + a^{(n)}.n^2 = h'... \text{ (II)}$$

$$\frac{1}{12}.\left(a' + a''.2^4 + a'''.3^4... + a^{(n)}.n^4\right) = h''.$$

Maintenant la transformation usitée nous donnera

$$X'.X''.X'''...X^{(p)} = h^p.e^{\frac{-h'P\varpi^2}{h}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{2h''}{h} - \frac{h'^2}{h^2}\right)}{2}P'\varpi^4\right\}$$

en posant

$$P = q^2 + q'^2 + q'''^2.... + q^{(p)2};$$

$$P' = q'^4 + q''^4 + q'''^4... + q^{(p)4}.$$

Si l'on retient seulement le premier terme de cette série, l'on aura

$$y = \frac{h^p}{\pi} \int d\varpi . \cos . q\varpi . e^{-\frac{h'}{h} P\varpi^2};$$

d'où l'on conclut par les formules précédentes

$$y = \frac{h^p}{2\sqrt{\pi P . \frac{h'}{h}}} . e^{-\frac{hq^2}{4P.h'}}$$

Cette valeur de y divisée par h^p, qui exprime le nombre total des combinaisons d'un nombre p de polyèdres tels que celui que nous avons décrit, donnera

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi P \frac{h'}{h}}} . e^{-\frac{hq^2}{4h'P}} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

pour la probabilité de satisfaire à l'équation

$$q'\mathcal{E}' + q''\mathcal{E}'' + \mathcal{E}''' \ldots + q^{(p)}\mathcal{E}^{(p)} = q.$$

Les quantités h et h' sont censées connues par les équations (I) et (II).

Avant d'aller plus loin je ferais ici une remarque qui nous sera utile par la suite. Si l'on prend seulement le premier terme de la valeur de y trouvée dans le N.° 9 l'on a

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a P}} . e^{\frac{-q^2}{4aP}}$$

pour expression de la probabilité. Cette fonction est de la même forme que celle désignée par (α) et n'en différe que par la valeur de la constante a qui dans celle-ci est exprimée par $\frac{h'}{h}$. En partant de cette considération, l'on aurait obtenu d'abord la solution du problème.

Dans les cas où la loi de la probabilité de chacun des nombres de la suite $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \ldots \pm n$ sera exprimée par une fonction d'une variable, l'on pourra obtenir les valeurs de h et de h' par le calcul des différences finies. En effet, soit $F\left(\frac{x}{2n}\right)$ une fonction telle que l'on ait

$$F\left(\frac{x}{2n}\right) = F\left(\frac{-x}{2n}\right),$$

et qu'en y faisant successivement $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$ l'on eût pour résultat $\frac{a}{h}, \frac{a'}{h}, \frac{a''}{h} \ldots \frac{a^{(n)}}{h}$. Les équations (I) et (II) deviendront

$$1 = \frac{a}{h} + 4n \frac{1}{2n} \mathrm{S}\, F\left(\frac{x}{2n}\right);$$

$$\frac{h'}{h} = 8n^3 \cdot \frac{1}{2n} \mathrm{S} \cdot \left(\frac{x}{2n}\right)^2 \cdot F\left(\frac{x}{2n}\right),$$

le signe S des intégrales finies s'étendant à toutes les valeurs de $x = 1$ jusqu'à $x = n$.

Mais si le nombre n est très-grand, alors l'on peut supposer $\frac{x}{2n} = \frac{x'}{b}$; $\frac{1}{2n} = \frac{dx'}{b}$, et changer le signe S en celui des intégrales infiniment petites, de sorte que en négligeant la fraction très-petite $\frac{a}{h}$ les deux équations précédentes donneront

$$1 = \frac{4n}{b}\int dx'.\,\mathrm{F}\left(\frac{x'}{b}\right)$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{8n^3}{b}\int dx'\,.\,\frac{x'^2}{b^2}.\,\mathrm{F}\left(\frac{x'}{b}\right)$$

en intégrant depuis $x'=0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\,b$.

Soit, pour plus de simplicité,

$$2\int dx'.\,\mathrm{F}\left(\frac{x'}{b}\right)=\mathrm{K};\ \int dx'\,.\,\frac{x'^2}{b^2}.\,\mathrm{F}\left(\frac{x'}{b}\right) = \mathrm{K}',$$

l'on aura

$$\frac{h'}{h} = 4n^2\,.\,\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$$

et la formule (α) deviendra, en la multipliant par 2 et posant $\frac{q}{2n} = \frac{d}{b}$,

$$\frac{\frac{1}{2n}\,.\,\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{P}\,.\,\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}}\,.\,e^{\frac{-\mathrm{K}}{4\mathrm{K}'\mathrm{P}}\,.\,\frac{d^2}{b^2}}}{} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\beta).$$

Telle est la probabilité pour satisfaire à l'équation

$$q'\mathcal{E}' + q''\mathcal{E}'' + q'''\mathcal{E}''' \ldots + q^{(p)}.\,\mathcal{E}^{(p)} = \pm g$$

lorsque n est infiniment grand, et que p est un nombre considérable.

13. Remplaçons dans la formule (β) $\frac{d}{b}$ par $\frac{q}{2n}$; nous aurons

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi P \cdot \frac{K'}{K}}} \cdot e^{\frac{-K}{4K'P} \cdot \frac{q^2}{4n^2}}.$$

Soient E; E′; E″; E‴, etc. les valeurs que prend cette formule en y faisant successivement $q=0, 1, 2, 3$, etc. Cela posé, imaginons un joueur assujétti à la condition suivante: Si la somme désignée par q est égale à zéro, le joueur ne payera rien; si la valeur q est ± 1, le joueur payera une certaine somme; mais il payera le double, le triple, le quadruple, etc.; si la valeur amenée de q est ± 2; ± 3; ± 4 etc. L'on demande la somme que doit payer ce joueur en supposant qu'il ne veuille pas s'exposer à un tel jeu.

La seule probabilité favorable au joueur est E; toutes les autres E′; E″; E‴; etc. lui sont contraires; et quoique ces probabilités soient décroissantes, elles ne laissent pas d'augmenter le désavantage du joueur en raison de la plus grande somme qu'il doit payer. Car il est clair que la probabilité E″ équivaut à la probabilité 2E″ pourvu que la somme à payer soit la même que celle qui correspond à E′; de même la probabilité E‴ est équivalente à 3E‴ si la somme à payer reste la même que pour E′; et ainsi de suite. De là

l'on conclut que l'état du joueur est le même que s'il avait contre lui les probabilités E', 2E'', 3E''' etc., et en sa faveur la seule probabilité E, avec la condition de perdre toujours la même somme, quelle que soit la valeur de q qu'il amenera. Donc le sort du joueur, ou ce qui revient au même, la valeur moyenne de q, sera donné par la somme

$$(\gamma) \ldots E' + 2E'' + 3E''' + 4E'''' + \text{etc.} = \frac{1}{2n\sqrt{\pi P \frac{K'}{K}}} \, S\, q \,.\, e^{\frac{-K}{4K'P} \cdot \frac{q^2}{4n^2}}$$

14. Cette formule donne la solution du problème concernant le milieu qu'il faut choisir entre les observations. Supposons que l'on ait un nombre p d'observations pour corriger un élément déjà à-peu-près connu. Soit u la correction de cet élément et α' la quantité donnée par l'observation: Cette quantité doit être considérée comme le résultat d'une fonction de l'élément, dans laquelle l'on aurait substitué à la place de l'élément sa valeur approchée augmentée de u, de sorte que, en négligeant les puissances de u supérieures à la première, l'on aura l'équation

$$\alpha' = \beta' + \delta' . u$$

β' et δ' étant des quantités que l'on sait déterminer.

Cette équation serait exacte si l'observation l'était, et elle suffirait pour connaître u; mais à cause des erreurs inévitables des observations, l'on aura exactement

$$\varepsilon' = \delta' . u - \gamma'$$

en faisant $\gamma'=\alpha'-\beta'$, et nommant $\mathcal{E}'$ l'erreur de l'observation. Chaque observation fournira une équation semblable, et l'on formera ainsi les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}' = \delta' \;.\; u-\gamma' ;\\ \mathcal{E}'' = \delta'' \;.\; u-\gamma'' ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathcal{E}^{(p)}=\delta^{(p)}.\; u-\gamma^{(p)}.\end{array}\right\}\ldots\ldots (C).$$

Pour déterminer la combinaison la plus avantageuse de ces équations, multiplions-les respectivement par q', q'', $q'''\ldots q^{(p)}$, et prenant leur somme il viendra,

$$S \,.\, q^{(p)}\,\mathcal{E}^{(p)} = u \,.\, S\,q^{(p)}.\delta^{(p)} - S\,q^{(p)}\gamma^{(p)} \ldots\ldots (\delta).$$

S'il était possible de choisir les multiplicateurs q', q'', etc., de manière à rendre $S\,q^{(p)}\mathcal{E}^{(p)}=0$, cette équation donnerait exactement

$$u=\frac{S.q^{(p)}.\gamma^{(p)}}{S.q^{(p)}.\delta^{(p)}},$$

mais comme cela est impraticable, tâchons de faire en sorte que cette valeur de u diffère de la vérité le moins qu'il est possible.

Nommons u' l'erreur de ce résultat, nous aurons

$$u=u'+\frac{S q^{(p)}.\gamma^{(p)}}{S q^{(p)}.\delta^{(p)}},$$

substituant cette valeur dans l'équation (δ) l'on trouvera

$$S\,q^{(p)}\,\mathcal{E}^{(p)}=u'.\,S\,q^{(p)}\,\delta^{(p)}.$$

Maintenant, si l'on adopte l'hypothèse assez naturelle que les erreurs positives sont également probables que les erreurs négatives de même valeur, et si l'on imagine que l'intervalle compris entre les erreurs extrêmes soit partagé dans un nombre infiniment grand de parties égales, représenté par $2n$; il est clair que l'on pourra appliquer ici tout ce qui a été dit dans le N.° 12 pour déterminer la probabilité relative à une valeur quelconque de $S.q^{(p)}.\delta^{(p)}$. De plus, si l'on adapte au cas que nous traitons les considérations faites dans le N.° 13, l'on comprendra que, si l'on fait

$$q = u' S.q^{(p)}\delta^{(p)} = u' Q$$

dans la formule (γ), la fonction

$$\frac{Q\sqrt{K}}{2n\sqrt{\pi PK'}}.Su'.e^{\frac{-K}{4K'P}.\frac{Q^2u'^2}{4n^2}}$$

qui en résulte, exprime la valeur la plus probable de l'erreur u', d'où il suit que si l'on fait

$\frac{u'}{2n}=\frac{x'}{b}$; $\frac{1}{2n}=\frac{dx'}{b}$ l'on aura

$$\frac{2nQ\sqrt{K}}{\sqrt{\pi K'P}}\int\frac{x'dx'}{b^2}.e^{\frac{-Q^2K.x'^2}{4K'P.b^2}}$$

pour la correction la plus probable de u. A' la rigueur il faudrait prendre pour limites de cette intégrale la valeur de x' correspondante à la plus grande valeur de l'erreur u', et celle correspondante à $u'=0$; mais la

rapidité avec laquelle la fonction exponentielle décroît, permet de prendre $x'=0$, $x'=\infty$ pour limites de l'intégrale, ce qui donne

$$\frac{4n}{Q}\cdot\sqrt{\frac{PK'}{\pi K}}$$

pour la correction de u relative à un système quelconque de multiplicateurs q', q'', $q'''\ldots q^{(p)}$. Nous avons supposé l'intervalle $2n$, qui comprend les erreurs positives et négatives, égal à b, ainsi en remplaçant $4n$ par $2b$, l'on aura

$$\frac{2b}{Q}\cdot\sqrt{\frac{K'P}{\pi K}}\ \ldots\ldots\ldots\ (B)$$

pour la correction de u exprimée par des unités de même espèce que celles qui mesurent l'intervalle b.

Il est clair actuellement que le meilleur système de multiplicateurs est celui qui rendra *minimum* la formule (B). Or nous avons

$$\frac{\sqrt{P}}{Q}=\frac{\sqrt{q'^2+q''^2+q'''^2\ldots+q^{(p)}}}{q'\delta'+q''\delta''+q'''\delta'''\ldots+q^{(p)}\delta^{(p)}};$$

donc, si l'on suppose $1=q'=q''=\ldots q^{(p)}$, il faudra, pour que la correction de u soit la plus petite, préparer les équations (C), de manière que dans chacune d'elles le coëfficient de u ait le signe positif. L'on sait que le célèbre astronome Tobie MAYER est le premier qui a inventé cette règle, et qu'il en a fait usage pour perfectionner les tables de la Lune. Suivant cette méthode l'on aurait

$$u = \frac{S.\gamma^{(p)}}{S.\delta^{(p)}},$$

et la formule (B) donne

$$\frac{2b\sqrt{PK'}}{S.\delta^{(p)}.\sqrt{\pi K}}$$

pour la correction de cette valeur. Mais cette correction n'est pas la plus petite possible. Pour trouver celle-ci il faut déterminer les multiplicateurs $q', q'', .. q^{(p)}$, en égalant à zéro la différentielle partielle de la fonction $\frac{\sqrt{P}}{Q}$ prise par rapport à toutes les variables $q', q'', q''' ... q^{(p)}$, ce qui donnera

$$\frac{q^{(p)}}{\delta^{(p)}} = \frac{q'^2 + q''^2 + q'''^2 ... + q^{(p)2}}{q'\delta' + q'' + q'''\delta''' ... + q^{(p)}.\delta^{(p)}},$$

où le premier membre doit prendre successivement toutes les valeurs $\frac{q'}{\delta'}$; $\frac{q''}{\delta''}$; ... $\frac{q^{(p)}}{q^{(p)}}$, et le second rester invariable. Il est clair que l'on satisfait à l'équation précédente en prenant

$$q' = \mu\delta'; \; q'' = \mu\delta''; \; q''' = \mu\delta''' ... q^{(p)} = \mu\delta^{(p)},$$

ce qui donne $\mu = \frac{P}{Q}$.

Il suit de là que l'on a

$$u = \frac{\gamma'\delta' + \gamma''\delta'' + \gamma'''\delta''' ..... + \gamma^{(p)}.\delta^{(p)}}{\delta'^2 + \delta''^2 + \delta''' ..... + \delta^{(p)2}},$$

et la formule (B) donne

$$\frac{2b\sqrt{K'}}{\sqrt{\pi K(\delta'^2+\delta''^2\ldots+\delta^{(p)2})}}$$

pour la correction de cette valeur, laquelle est effectivement plus petite que celle qui a lieu en supposant

$$1=q'=q''=\ \ldots\ q^{(p)}.$$

La comparaison de la valeur précédente de u avec les équations (C) fait voir que celle-ci jouit de la propriété remarquable de rendre *minimum* la fonction

$$\left(\delta'.u'-\gamma'\right)^2+\left(\delta''.u-\gamma''\right)^2\ldots+\left(\delta^{(p)}.u-\gamma^{(p)}\right)^2,$$

laquelle est égale à la somme des quarrés des erreurs ε', ε'', ε''' ... $\varepsilon^{(p)}$. Le calcul des probabilités établit par là le principe des moindres quarrés, découvert par Legendre et Gauss dans ces derniers tems.

La valeur de la correction dépend du rapport de K' à K, lequel ne peut pas être déterminé *a priori* à cause que l'on ignore presque toujours la forme de la fonction $F\left(\frac{x'}{b}\right)$, d'où dépend la loi de probabilité des erreurs, mais Laplace démontre que l'on peut dans tous les cas supposer $\frac{K}{K'}>6$.

15. Reprenons la formule

$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\pi K'P}}\cdot e^{\frac{-Kq^2}{4K'P.4n^2}}$$

trouvée dans le N.° 13. Nous avons vu (N.° 14) que

$q = u'Q$, donc si l'on nomme c l'intervalle qui comprend les erreurs positives et négatives de q, en faisant

$\frac{q}{2n} = \frac{u'Q}{c}$; $\frac{1}{2n} = \frac{Q\,du'}{c}$, l'intégrale

$$\frac{2Q\sqrt{K}}{\sqrt{\pi}\,P\,K'}\int \frac{du'}{2c}\cdot e^{\frac{-Ku'^2Q^2}{4K'Pc^2}}$$

prise depuis $u'=0$ jusqu'à $u'=u'$ donnera la probabilité pour que l'erreur de u soit comprise entre $\pm u'$. Pour exprimer cette intégrale plus simplement, il suffit de poser

$$u' = \frac{2ct\sqrt{K'P}}{Q\sqrt{K}},$$

ce qui la changera en

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int dt\,.\,e^{-t^2} \;\ldots\ldots (\mathcal{E}).$$

Suivant la méthode des moindres carrés des erreurs des observations nous avons vu dans le N.° précédent que l'on a

$$Q = \mu\left(\delta'^2 + \delta''^2 \ldots + \delta^{(p)2}\right)$$

$$P = \mu^2\left(\delta'^2 + \delta''^2 \ldots + \delta^{(p)2}\right)$$

donc l'on aura

$$u' = \frac{2ct\sqrt{K'}}{\sqrt{K\left(\delta'^2 + \delta''^2 \ldots + \delta^{(p)2}\right)}} \;\ldots\ldots (\theta).$$

Suivant la méthode de MAYER l'on a $P=p$;

$$Q=\delta'+\delta''+\delta''' \ldots +\delta^{(p)},$$

d'où l'on conclut

$$u' = \frac{2ct\sqrt{K'P}}{(\delta'+\delta'' \ldots + \delta^{(p)})\sqrt{K}} \ldots (\theta').$$

Maintenant, si l'on observe que le coëfficient de t, qui entre dans l'équation (θ), est précisément de la même forme que l'expression de la correction relative à la méthode des moindres quarrés, et que le coëfficient de t de la formule (θ') est de la même forme que l'expression de la correction relative à la méthode de MAYER, l'on en conclura que pour une même valeur de t la valeur de u' donnée par l'équation (θ'). doit être plus grande que celle donnée par l'équatiou (θ). Mais l'intégrale $(\mathcal{C})$ reste la même pour ces deux valeurs de u', donc à probabilité égale les limites des erreurs sont plus resserrées en suivant le principe des moindres quarrés qu'en suivant la méthode ordinaire.

16. Si l'on avait à déterminer plus d'une inconnue, d'après un système d'équations dont le nombre excéderait de beaucoup celui des inconnues, la méthode des moindres quarrés des erreurs des observations serait encore celle qu'il faudrait suivre afin de diminuer autant que possible la correction la plus probable relative à chaque inconnue. Pour établir ce principe, considérons d'abord le cas où l'on aurait à corriger deux élémens déjà à-peu-près connus.

En nommant u et z les corrections des deux élé-

mens, il serait aisé de former le système suivant d'équations

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon' = \delta'.u + \beta'.z - \gamma'; \\ \varepsilon'' = \delta''.u + \beta''z - \gamma''; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon^{(p)} = \delta^{(p)}.u + \beta^{(p)}z - \gamma^{(p)} \end{array}\right\} \dots\dots (C')$$

par des considérations analogues à celles que nous avons employé au N.° 14.

Pour déterminer la combinaison la plus avantageuse de ces équations. Multiplions-les respectivement par q'; q''; q''' . . . $q^{(p)}$; leur somme, après les avoir ainsi multipliées, sera

$$Q = Mu + Nz - L \dots (1)$$

en faisant

$$Q = Sq^{(p)}.\varepsilon^{(p)};\ M = Sq^{(p)}.\delta^{(p)};\ N = Sq^{(p)}\beta^{(p)};\ L = Sq^{(p)}\gamma^{(p)}.$$

Les mêmes équations multipliées respectivement par $q_{\prime}$; $q_{\prime\prime}$; $q_{\prime\prime\prime}$; . . . $q_{(p)}$ donnent

$$Q' = M'u + N'z - L' \dots (2)$$

en faisant

$$Q' = Sq_{(p)}\varepsilon^{(p)};\ M' = Sq_{(p)}.\delta^{(p)};\ N' = Sq_{(p)}\beta^{(p)};\ L' = Sq_{(p)}\gamma^{(p)}.$$

En admettant la possibilité de choisir les multiplicateurs tels que l'on ait $Q = 0$, $Q' = 0$, les équations (1) et (2) donneraient exactement

$$\left.\begin{array}{l}\left(NM'-MN'\right).\,z = LM'-L'M;\\ \left(NM'-MN'\right).\,u = NL'-LN';\end{array}\right\}\cdots(B)$$

Mais, si les conditions $Q=0$, $Q'=0$, n'ont pas lieu, les valeurs de z et de u données par ces équations auront besoin chacune d'une correction, de sorte que si l'on nomme z' la correction de z, u' celle de u, les équations (1) et (2) donnent

$$Q = Mu' + Nz'; \quad Q' = M'.u + N'z'.$$

Maintenant, si l'on suppose les erreurs positives également probables que les erreurs négatives, il est clair que l'on aurait la probabilité relative à des valeurs quelconques de Q et de Q' en résolvant un problème analogue à celui que nous avons résolu au N.° 10. Mais l'on peut se dispenser d'entreprendre la solution de ce problème en s'aidant de la remarque faite au N.° 12, dans un cas semblable, où l'on a vu que l'inégale probabilité des erreurs ne change pas la forme de la fonction que l'on cherche. En conséquence de cela, il suffira de diviser par $(2n)^p$ la formule (α') posée dans le N.° 10, et l'on aura

$$\frac{1}{4\pi a\sqrt{E}} \cdot e^{-\frac{1}{4aE}\left(CQ^2 - 2BQQ' + AQ'^2\right)}$$

pour expression de la probabilité que Q et Q' sont les

valeurs des sommes $Sq^{(p)}\mathcal{E}^{(p)}$, $Sq_{(p)}\mathcal{E}^{(p)}$. Il n'est pas besoin d'avertir que la constante a qui entre dans cette formule, doit avoir une valeur différente de celle qu'elle avait au N.° 10. Dans le problème analogue traité au N.° 12, nous avons vu que la constante a était de la forme $2n$K, mais dans le cas actuel, où il s'agit de satisfaire à une double condition, la probabilité doit être infiniment plus petite, ainsi il faudra supposer $a = 4n^2\mathrm{K}$, ce qui change la probabilité précédente en celle-ci :

$$\frac{1}{4\pi\mathrm{K}.4n^2\sqrt{\mathrm{E}}}.e^{-\frac{1}{4\mathrm{EK}.4n^2}\left(\mathrm{CQ}^2-2\mathrm{BQQ'}+\mathrm{AQ'}^2\right)}$$

Nommons c l'intervalle $2n$, qui comprend les valeurs positives et négatives de Q et de Q' : L'on pourra supposer $\frac{\mathrm{Q}}{2n}=\frac{x}{c}$; $\frac{\mathrm{Q'}}{2n}=\frac{y}{c}$; $\frac{1}{2n}=\frac{dx}{c}$; $\frac{1}{2n}=\frac{dy}{c}$,

ce qui change la formule précédente en celle-ci,

$$(3)\ \ldots\ \frac{dxdy}{4\pi\mathrm{K}c^2\sqrt{\mathrm{E}}}.e^{-\frac{1}{4\mathrm{K}c^2\mathrm{E}}\left(\mathrm{C}x^2-2\mathrm{B}xy+\mathrm{A}y^2\right)}$$

Or nous avons

$$x=\mathrm{M}u'+\mathrm{N}z'$$

$$y=\mathrm{M'}u'+\mathrm{N'}z',$$

donc l'on aura, conformément à un théorème connu

du Calcul Intégral,

$$dxdy = \left(MN' - M'N\right) du'dz'.$$

Soit, pour plus de simplicité,

$$F = CM^2 - 2BMM' + AM'^2 ;$$

$$G = CMN - B\left(M'N + MN'\right) + AM'N';$$

$$H = CN^2 - 2BNN' + AN'^2 ;$$

$$I = MN' - M'N$$

la formule (3) deviendra

$$\frac{Idu'dz}{4\pi Kc^2\sqrt{E}} \cdot e^{-\frac{1}{4Kc^2 E}\left(Fu'^2 + 2Gu'z' + Hz'^2\right)}$$

Cette expression donne la probabilité que les erreurs de u et de z seront u' et z'; ainsi en supposant z' constant et donnant à u' toutes les valeurs qu'il peut recevoir entre ses limites, l'on aura une suite de probabilités dont la somme sera évidemment égale à la probabilité qu'il y a pour que l'erreur de z soit z'; donc l'intégrale

$$\frac{Idz'}{4\pi c^2 K\sqrt{E}} \int du' . e^{-\frac{1}{4Kc^2 E}\left(Fu'^2 + 2Gu'z' + Hz'^2\right)}$$

sera la probabilité de l'erreur z'. A l'égard des limites de cette intégrale l'on pourra prendre $u' = -\infty$,

$u' = +\infty$, parce que la fonction exponentielle décroît rapidément

Il est aisé de voir que l'intégrale précédente peut être mise sous cette forme

$$\frac{\mathrm{I}dz'}{4\pi c^2 \mathrm{K}\sqrt{\mathrm{E}}} . e^{-\frac{(\mathrm{HG}-\mathrm{G}^2)z'^2}{4\mathrm{K}c^2\mathrm{EF}}} \int du' . e^{-\frac{\mathrm{F}}{4c^2\mathrm{KE}}\left(u'+\frac{\mathrm{G}z'}{\mathrm{F}}\right)^2}$$

et en la prenant depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, le résultat sera

$$\frac{\mathrm{I}dz'}{2c\sqrt{\pi\mathrm{KF}}} . e^{-\frac{(\mathrm{FH}-\mathrm{G}^2)z'^2}{4c^2\mathrm{KEF}}} .$$

Or nous avons

$$\mathrm{HF}-\mathrm{G}^2 = (\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(\mathrm{M'N}-\mathrm{MN'})^2,$$

mais $\mathrm{E} = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ . . . (N.° 10), donc

$$\frac{\mathrm{HF}-\mathrm{G}^2}{\mathrm{E}} = \mathrm{I}^2 .$$

Il suit de là que la probabilité de l'erreur z' sera exprimée par

$$\frac{\mathrm{I}dz'}{2c\sqrt{\pi\mathrm{KF}}} . e^{-\frac{\mathrm{I}^2 z'^2}{4c^2\mathrm{KF}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Il n'est pas inutile d'observer que cette fonction, ainsi que celle qui dans le N.° 14 donnait la probabilité de l'erreur u' sont chacune de la forme

$$\frac{hdx}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2} .$$

Cette fonction ne change pas en changeant le signe de x: Sa plus grande valeur correspond à $x = 0$, et elle diminue rapidément à mesure que x augmente; de plus son intégrale prise depuis l'infini négatif, jusqu'à l'infini positif, est égale à l'unité. Ces propriétés sont précisément celles que doit avoir toute fonction propre à représenter la loi des erreurs des observations.

Si l'on multiplie l'expression (β) par z', l'intégrale

$$\frac{1}{2c\sqrt{\pi \mathrm{KF}}} \int z'\, dz'\, e^{-\frac{1^2 z'^2}{4c^2 \mathrm{KF}}}$$

donnera la correction la plus probable de z' . . (13).

Conformément à ce qui a été dit dans le N.° 14, l'on pourra prendre $z' = 0$, $z' = \infty$ pour les limites de cette intégrale; ce qui donnera

$$\frac{c}{1} \sqrt{\frac{\mathrm{KF}}{\pi}} \; . \; . \; . \; (4)$$

pour la correction de z relative à un système quelconque de multiplicateurs $q', q'' \ldots q^{(p)}$; $q_{,}$; $q_{,,} \ldots q_{(p)}$.

Il est clair qu'il suffit de changer F en H pour avoir

la correction correspondante de u laquelle sera par conséquent

$$\frac{c}{1}\sqrt{\frac{\mathrm{KH}}{\pi}} \quad \ldots \quad (5).$$

Actuellement il est clair que le meilleur système de multiplicateurs est celui qui rendra *minimum* les fonctions (4) et (5). Or il est aisé de prouver par les règles connues du Calcul différentiel que l'on remplit cette double condition en prenant

$$q' = \mu\delta'\,;\ q'' = \mu\delta''\,;\ q''' = \mu\delta''' \quad \ldots\ldots \quad q^{(p)} = \mu\delta^{(p)}\,;$$

$$q_{,} = \mu\beta'\,;\ q_{,,} = \mu\beta''\,;\ q_{,,,} = \mu\beta''' \quad \ldots\ldots \quad q_{(p)} = \mu\beta^{(p)}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (D) il en résultera pour u et z les valeurs suivantes:

$$z = \frac{\mathrm{S}.\gamma^{(p)}.\,\delta^{(p)}.\,\mathrm{S}\beta^{(p)}.\,\delta^{(p)} - \mathrm{S}\beta^{(p)}.\,\gamma^{(p)}.\,\mathrm{S}\delta^{(p)2}}{(\mathrm{S}.\delta^{(p)}\beta^{(p)})^2 - \mathrm{S}\delta^{(p)2}.\,\mathrm{S}\beta^{(p)2}}\,;$$

$$u = \frac{\mathrm{S}\delta^{(p)}\beta^{(p)}.\,\mathrm{S}\beta^{(p)}\gamma^{(p)} - \mathrm{S}\beta^{(p)}.\,\mathrm{S}\gamma^{(p)}\delta^{(p)}}{(\mathrm{S}\delta^{(p)}\beta^{(p)})^2 - \mathrm{S}\delta^{(p)2}.\,\mathrm{S}\beta^{(p)2}}.$$

En comparant ces valeurs avec les équations (C') l'on reconnaît qu'elles coïncident avec celles que l'on trouverait pour rendre *minimum* la fonction

$$\left(\delta'.\,u + \beta'z - \gamma'\right)^2 + \left(\delta''.u + \beta''z - \gamma''\right)^2 \ldots$$
$$+ \left(\delta^{(p)}.\,u + \beta^{(p)}z - \gamma^{(p)}\right)^2$$

c'est-à-dire la somme des carrés des erreurs des observations.

17. Si l'on avait à déterminer trois ou un plus grand nombre d'inconnues d'après un nombre d'équations supérieur à celui des inconnues l'on trouverait, en suivant l'analyse précédente que le principe des moindres carrés à toujours lieu. Mais il faut avouer que le calcul en serait extrêmément long, même pour le cas où il y a trois inconnues seulement.

Cependant, si l'on adopte la fonction

$$\frac{hdx}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$$

pour exprimer la loi de la probabilité d'une erreur quelconque $\pm x$, il devient fort aisé de démontrer le principe des moindres carrés pour un nombre quelconque d'inconnues. En effet, nommons x', x'', x''', ... $x^{(p)}$ les erreurs d'un nombre p d'observations; la probabilité que ce système d'erreurs est celui qui aura lieu, est égale, comme l'on sait, au produit des probabilités relatives à chaque erreur, c'est-à-dire à la fonction

$$\frac{h^p}{(\pi)^{\frac{p}{2}}} dx'dx''dx''' \ldots dx^{(p)} . e^{-h^2 (x'^2 + x''^2 + x'''^2 \ldots + x^{(p)2})}$$

Or il est clair que le meilleur système d'erreurs que l'on peut choisir est celui qui est le plus probable.

Mais le *maximum* de la probabilité précédente correspond au *minimum* de la somme des carrés

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{(p)2}$$

des erreurs des observations, donc il faudra déterminer les inconnues conformément à ce principe. C'est de cette manière que le célèbre GAUSS a établi le principe des moindres carrés dans son excellent ouvrage intitulé: (*Theoria motus corporum cœlestium*).

Si l'on fait attention que la fonction $\frac{hdx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ s'est présentée dans la solution de tous les problêmes que nous avons parcourus, l'on reconnaîtra qu'il est assez naturel de supposer que la probabilité des erreurs des observations est représentée par cette fonction.

OBSERVATION

DE L'OPPOSITION DE *JUPITER*,

FAITE A L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE DE TURIN, ANNÉE 1813

PAR M.r PLANA.

Lue dans la Séance du 8 Mars.

Les observations, par lesquelles je détermine les circonstances de cette opposition, ont été faites avec une lunette méridienne de 3 pieds et $\frac{1}{2}$ de foyer et avec un cercle répétiteur de 18 pouces de diamètre, à niveau fixe, construit à Paris par M.r Fortin. Par le premier de ces instrumens j'obtenais les différences d'ascension droite entre le centre de la planète et les étoiles de comparaison; par le second j'obtenais la distance méridienne du centre du Jupiter au Zénith, au moyen de vingt observations faites peu de minutes avant, et peu de minutes après le passage de l'astre au méridien.

Parmi les étoiles qui ont été conjointement observées, j'ai choisi la ζ du Cancer pour déterminer la position géocentrique de la planète. Cette étoile de cinquième ou sixième grandeur différait assez peu de la position de Jupiter, soit en ascension droite, soit en déclinai-

son, de sorte que l'on n'a point à craindre l'influence des erreurs qui pourraient être occasionées par une petite irrégularité dans la marche de la pendule, et par une petite déviation de l'instrument de passage.

Au reste la pendule suivait presque exactement le tems sidéral : en observant les passages au méridien d'un grand nombre d'étoiles, j'ai trouvé que l'accélération diurne n'était que de 3″; ainsi l'on peut supposer, sans erreur sensible, que l'horloge suit exactement le tems sidéral pendant quelques minutes. Les observatoires bien construits, et qui ont l'avantage d'être munis d'un bon mural, offrent à l'Astronome la faculté de faire les observations de cette espèce avec beaucoup moins de peines, mais n'ayant point à ma disposition un tel instrument, j'ai taché de parvenir au but que je m'étais proposé, à l'aide des instrumens dont l'Observatoire est fourni.

Voici maintenant, dans le tableau suivant, les instans des passages observés aux cinq fils du micromètre de la lunette méridienne.

JANVIER 1813.

JOURS du MOIS.	NOMS des ASTRES.	I.	II.	FIL MÉRIDIEN. III.	IV.	V.	PASSAGES au MÉRIDIEN.
20	ζ Cancer	1′ 25″	1′ 55″	8^h 2′ 25″	2′ 55″	3′ 24″	8^h 2′ 24″,8
	♃ Centre	28 1,5	28 32	8 29 2,5	29 32,5	30 1,5	8 29 2,0
23	ζ Cancer	1 34	2 4,5	8 2 34	3 4	3 33	8 2 33,9
	♃ Centre	26 32	27 3,0	8 27 33	28 3	28 33	8 27 32,8
25	ζ Cancer	1 40	2 10	8 2 40	3 10	3 39	8 2 39,8
	♃ Centre	25 32	26 3	8 26 33	27 3	27 32	8 26 32,6
26	ζ Cancer	1 43	2 13	8 2 43	3 13	3 42	8 2 42,8
	♃ Centre	25 1,5	25 32	8 26 2,5	26 32	27 2,0	8 26 2,0
27	ζ Cancer	1 45	2 16	8 2 46	3 16	3 44,5	8 2 45,5
	♃ Centre	24 31	25 2,5	8 25 32,5	26 3	26 32	8 25 32,2
29	ζ Cancer	1 51	2 21	8 2 51	3 21	3 49,5	8 2 50,6
	♃ Centre	23 31	24 2	8 24 31,5	26 2	25 31,5	8,24 31,6
30	ζ Cancer	1 53	2 23	8 2 53	3 23	3 52	8 2 52,8
	♃ Centre	23 1	23 32	8 24 2	24 32	25 2	8 24 1,8

FÉVRIER.

JOURS du MOIS.	NOMS des ASTRES.	I.	II.	FIL MÉRIDIEN. III.	IV.	V.	PASSAGES au MÉRIDIEN.
1	ζ Cancer	1 59	2 29,5	8 2 59	3 29	3 58,5	8 2 59,0
	♃ Centre	22 2,5	22 33	8 23 3	23 33,5	24 3	8 23 3,0
3	ζ Cancer	2 5	2 35	8 3 5	3 35	4 4	8 3 4,8
	♃ Centre	21 3	21 34,5	8 22 4,5	22 35	23 4	8 22 4,2

En réduisant au méridien les observations faites avec le cercle répétiteur, et tenant compte des effets de la réfraction, et de la parallaxe, j'ai obtenu les résultats suivans :

JOURS DU MOIS.	DISTANCE MÉRIDIENNE DE JUPITER AU ZÉNITH.			NOMBRE des Observations.
1813. Janvier 20	25°	14′	42″,3	18
» 23	25	8	36,8	20
» 25	25	4	37,9	20
» 26	25	2	35,2	20
» 27	25	0	35,8	20
» 29	24	56	41,8	20
» 30	24	54	42,1	20
» Février 1	24	50	57,3	20
» 3	24	47	14,1	10

Pour calculer la position apparente de l'étoile, je me suis servi de la table qui se trouve à la page 129 du tome II des tables d'aberration et de nutation du célèbre Astronome M.r le Baron De Zach, et j'ai trouvé

Ascension droite apparente de ζ du *Cancer*,

Pour le 19 janvier 1813 . . . 120°. 22′. 9″,76.

Pour le 30 janvier 1813 . . . 120. 22. 10,64.

Cela posé, si l'on prend pour chaque jour la différence des passages observés entre Jupiter et ζ du Cancer, l'on aura l'ascension droite de la planète, en ajoutant successivement ces différences, réduites en arc, à l'ascension droite apparente de l'étoile; et pour avoir les déclinaisons correspondantes, il suffira de retrancher les distances méridiennes de Jupiter, rapportées dans

le tableau précédent, de 45° 3′ 59″,8, latitude de l'Observatoire de l'Académie. Voici les résultats que j'ai obtenus en opérant ainsi:

1813. JOURS DU MOIS.	TEMS MOYEN.			ASCENSION DROITE OBSERVÉE DE JUPITER.			DÉCLINAISON BOR.e OBSERVÉE DE JUPITER.		
Janvier 20	12h	28′	15,″0	127°	1′	27″,8	19°	49′	17″,5
23	12	14	49,2	126	36	53,6	19	55	23,0
25	12	5	51,9	126	20	22,2	19	59	21,9
26	12	1	22,5	126	11	58,3	20	1	24,6
27	11	56	54,2	126	3	50,8	20	3	24,0
29	11	47	56,8	125	47	25,4	20	7	18,0
30	11	43	29,0	125	39	25,6	20	9	17,7
Février 1	11	36	2,4	125	23	10,6	20	13	2,5
3	11	27	12,0	125	7	1,6	20	16	45,7

A l'époque de ces observations, l'obliquité apparente de l'écliptique était de 23°. 27′. 42″,3 : Avec cet élément, et les ascensions droites et déclinaisons observées, j'ai calculé les longitudes et les latitudes géocentriques apparentes de Jupiter.

Pour réduire celles-ci en longitudes et latitudes vraies, comptées de l'équinoxe moyen, il est d'abord nécessaire d'ajouter à chacune des longitudes 10″,6, produites par les effets de la nutation luni-solaire; ensuite il faudra en retrancher 11″,4 pour les dépouiller des effets de l'aberration de la lumière.

Je remarquerai ici en passant, que dans toutes les oppositions des planètes supérieures, l'on peut calculer avec une exactitude suffisante l'effet de l'aberration, à l'aide de cette formule

$$20'',246 \left(-1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right),$$

où *a* exprime la moyenne distance de la planète au Soleil, évaluée en prenant pour unité le demi-grand-axe de l'orbe terrestre. Au reste cette correction doit toujours être appliquée à la longitude apparente avec le signe dont elle est affectée.

D'après cela j'ai obtenu les longitudes vraies comptées de l'équinoxe moyen, et les latitudes correspondantes aux instans indiqués.

1813. JOURS DU MOIS.	LONGITUDE GÉOCENTRIQUE OBSERVÉE DE JUPITER.	LATITUDE BORÉALE GÉOCENTRIQUE OBSERVÉE DE JUPITER.
Janvier 20	124° 30' 28",0	0° 41' 21",3
23	124 6 34,7	0 41 44,6
25	123 50 31,9	0 41 56,8
26	123 42 22,5	0 42 4,9
27	124 34 29,8	0 42 12,9
29	123 18 33,6	0 42 24,0
30	123 10 50,0	0 42 36,1
Février 1	122 55 7,0	0 42 42,8
3	122 39 31,3	0 42 51,5

Avec les Tables du Soleil de M.r Carlini, et les Tables de Jupiter de M.r Bouvard, publiées à Paris par le Bureau des Longitudes, j'ai calculé les lieux de Jupiter pour les instans des observations, et j'ai trouvé les résultats suivans :

1813.		ERREURS DES TABLES.	
JOURS DU MOIS.		EN LONGITUDE.	EN LATITUDE.
Janvier	26	+ 4″,3	+ 3″,7
	23	+ 1,0	+ 5,4
	25	+ 3,2	+ 4.7
	26	+ 11,1	+ 4,1
	27	+ 5,8	+ 2,6
	29	+ 8,0	+ 5,0
	30	— 3,4	— 1,1
Février	1	+ 1,4	+ 1,2
	3	+ 8,9	+ 5,0

La somme des erreurs en longitude est de 40″,3; divisant ce nombre par neuf, l'on a + 4″,47 pour l'erreur moyenne des Tables sur la longitude géocentrique. Maintenant, si l'on réduit cette erreur géocentrique en héliocentrique, on la trouve égale à + 4″,29.

L'instant de l'opposition se trouve compris entre l'instant de l'observation faite le 23 janvier, et l'instant de midi moyen du 24 janvier. Calculant pour ces deux instans les lieux du Soleil, comptés de l'équinoxe moyen et libres de l'aberration, ainsi que les lieux héliocentriques de Jupiter corrigés de l'erreur trouvée, j'ai obtenu

1813. JANVIER	TEMS MOYEN.	LONGITUDE DU SOLEIL.	LONGITUDE HÉLIOCENTRIQUE DE JUPITER.
23	$12^h\ 14'\ 49'',2$	$303°\ 41'\ 18'',0$	$124°\ 1'\ 47'',9$
24	0 0 0	304 11 10,0	124 4 10,1
	11 45 10,8	29 52,0	2 22,2

A l'instant de l'observation du 23 janvier la distance angulaire de Jupiter et de la terre était donc de 20′, 29″, 9. Le mouvement de la terre relativement à Jupiter à été de 29′, 52″,0 − 2′, 22″, 2 = 1649″, 8 dans l'intervalle de $11^h 45'$, 10″,8; par conséquent le tems qui doit être ajouté à celui qui correspond à l'observation du 23 est exprimé par

$$\frac{20'\ 29'',9}{29'\ 52'',0-2'\ 22'',2}\times 11^h 45', 10'',8=\frac{1229'',9}{1649,8}\times 705', 18=8^h 45', 42'',0.$$

Il suit de là que l'instant de l'opposition de Jupiter de l'année 1813 doit être fixé au 23 janvier 21^h 0′, 31″,2 tems moyen sous le méridien de l'Observatoire de l'Académie de Turin. A cet instant la longitude de Jupiter comptée de l'équinoxe moyen était de 124°, 3′, 33″,9.

La moyenne des erreurs sur la latitude géocentrique est de + 3″,40: Cette même erreur réduite en héliocentrique résulte égale à + 3″,26. De là l'on a conclu que la latitude boréale de Jupiter était de 0°. 33′. 59″,5 à l'instant de l'opposition.

EXPÉRIENCES ET OBSERVATIONS

CONCERNANT LES EFFETS DE DIVERS POISONS ET D'AUTRES SUBSTANCES SUR LES ANIMAUX.

PAR MM. VASSALLI EANDI, ROSSI, ET BORSARELLI.

Lues dans les Séances du 23 Mai 1812, et du 8 Février 1813.

QUEL est l'effet des divers poisons sur les animaux? Quel est le systême que chaque poison attaque, de préférence, dans l'animal? Voilà les questions que nous nous sommes proposées à résoudre. Concourir au perfectionnement de la Physiologie, de la Chimie générale et animale, et de la Clinique, c'est le but auquel nous visons.

Pour donner une plus grande étendue à nos recherches, outre celles que nous faisons en commun, chacun de nous en fait d'autres dans son particulier. Monsieur VASSALLI-EANDI qui donne une partie de ses loisirs à l'étude de la physiologie générale des êtres organisés, fait, depuis deux ans, de nombreuses expériences et observations sur les effets de divers poisons et d'autres substances sur les végétaux; Monsieur ROSSI,

dont les travaux tendent toujours au perfectionnement de l'art de guérir, s'occupe particulièrement de l'action de chaque substance sur les divers systêmes de l'animal : l'affinité des diverses substances, les modifications qu'elles offrent par leurs différentes combinaisons, les propriétés que chacune présente, soit séparément, soit étant jointe aux autres, font l'objet principal des recherches de Monsieur Borsarelli.

Par cet exposé il résulte que le travail que nous avons entrepris, est de longue haleine et propre à occuper plusieurs Savans pendant un grand nombre d'années.

Nous donnerons, de tems en tems, les résultats de nos essais ; ceux que nous avons l'honneur de vous présenter, concernent les effets de l'upas, de l'opium, de la noix vomique, des extraits de cigüe, de rhus radicans, de laitue vireuse, de coques de levant, gommeux d'opium, de l'eau de laurier-cerise, de l'ammoniaque liquide, des cantharides, du phosphore, du muriate sur-oxigéné de mercure, des oxides de cuivre, de plomb et rouge de mercure préparé avec l'acide nitrique, et du tartrite antimonié de potasse.

Plusieurs de ces expériences et observations ont été répétées en mai et en décembre 1812; les premières ont été faites en janvier de la même année.

On croit inutile de donner les détails de toutes, mais on ne manquera pas de remarquer les différences qu'elles ont présentées. Sont-elles dues aux divers

âges, états, constitutions, etc.? La saison en aurait-elle été la cause?

PREMIÈRES EXPÉRIENCES ET OBSERVATIONS.

26 Janvier. — 1. *Upas Tieuté.* (*)

Un demi-gramme dissous dans l'eau a été introduit, par le moyen d'une blessure, dans les muscles fléchisseurs latéraux du cou d'un poulet; celui-ci ayant été tué 40 jours après, on n'a pu rien reconnaître d'extraordinaire à la blessure.

2. On en a fait avaler un demi-gramme à un autre poulet, qui néanmoins continuait à vivre: tué 40 jours après, on n'y a rien observé de remarquable.

3. Un gramme d'Upas dissous dans l'eau a été introduit entre les fossettes musculaires des fléchisseurs de la jambe droite d'un lapin: à l'exception de la simple irritation produite par la blessure, il ne paraît avoir rien souffert.

4. Un autre lapin, à qui on a fait avaler un gramme d'Upas, n'en a pas été incommodé. = Après ces

(*) Monsieur le Docteur Koreff à qui, pendant son séjour à Turin, Monsieur Vassalli-Eandi a communiqué plusieurs expériences physiologiques, lui a fait présent d'une dose considérable de cet Upas. Il était conservé dans de petits vaisseaux, ou réservoirs formés de joncs placés en rond, les uns à côté des autres, de façon à présenter la figure de tonneaux alongés. On verra par les effets, que cet Upas a perdu ses propriétés, soit qu'il fût trop vieux, soit que l'enveloppe de jonc ou celle de papier à plusieurs doubles, dans laquelle Monsieur Vassalli-Eandi l'avait placé, ait pu y contribuer pour quelque chose.

épreuves, les lapins qui les avaient souffertes, ont multiplié comme à l'ordinaire.

13 Mai. = *Upas Tieuté.*

On a fait tremper, pendant 24 heures, différens morceaux de bois, dans 2 décagrammes d'eau qui tenaient en dissolution un décagramme d'Upas.

1. On a introduit une flêche de bois simple dans les flancs d'une grenouille.

2. On a fait la même opération sur une autre grenouille, mais avec une flêche trempée dans l'Upas, qu'ensuite on avait eu soin de faire sécher.

3. Même opération a été faite avec une petite flêche de bois trempée dans l'Upas liquide.

4. Une flêche semblable, abreuvée d'Upas et trempée dans de l'eau chaude, a été passée dans les flancs d'une grenouille.

5. On a fait avaler à une grenouille un petit morceau de feuille de bette qu'on avait mis en digestion dans l'Upas.

Observations. = Les trois grenouilles, dans lesquelles on avait introduit les petites flêches mouillées dans l'Upas, ont vécu plus long-tems que celle à qui on avait passé dans les flancs une flêche toute simple.

La grenouille qui a avalé le petit morceau de bette, est morte six jours après.

Muriate sur-oxigéné de Mercure.

On a fait dissoudre un décagramme de ce sel dans deux décagrammes de mucilage, et on y a trempé, pendant 24 heures, des flèches de bois semblables aux précédentes.

1. On a introduit une de ces flèches humides dans les flancs d'une grenouille; elle est morte au bout de deux heures et 37 minutes.

2. On a fait de même avec une autre grenouille, mais auparavant on a eu soin de faire sécher la petite flèche; elle a cessé de vivre 3 heures et 37 minutes après.

3. On a fait avaler à une grenouille un petit morceau de feuille de bette qu'on avait mis à digérer dans la solution de sublimé; elle n'a vécu qu'une heure et 49 minutes.

Deuxième série des expériences et observations.

Pour éviter plusieurs répétitions, et, par-là, abréger et rendre plus clair notre exposé, nous avons réduit en tableau cette seconde série de nos recherches, qui a eu lieu le 16 mai 1812.

Plusieurs grenouilles faisaient des efforts pour vomir, et même pour enlever de la gorge, moyennant les deux

pattes de devant, les substances qu'on les avait forcées d'avaler : quelques-unes ont réussi à les rejeter presque de suite. On n'a pas rapporté toutes les observations, ni l'époque de la mort de ces animaux, toutes fois qu'elle n'a pas eu lieu dans les 24 heures, de crainte que les phénomènes observés n'eussent d'autres causes que les substances englouties.

TABLEAU des expériences et observations de la deuxième Série.

Substances avalées et réduites en pilules.	*Grenouilles soumises aux expériences.*	*Poids des substances avalées.*	*Heure, à laquelle elles ont été avalées.*		*Observations.*	*Mort.*		*Tems, pendant lequel elles ont conservé l'irritabilité reconnue par la pile galvanique*	
			heur.	min.		heur.	min.	heur.	min.
Muriate sur-oxigéné de Mercure.	1	2, 5 centi. grammes.	9	30	Vomi 5 minutes après.	11	34	1	57
	1	5	9	31	Convulsions.	10	54	1	38
	1	7, 5	9	32	Idem.	10	30	1	42
	1	10	9	33	Idem.	10	23	1	52
Oxide de Cuivre.	1	15	10	2	Irritation continuelle.	11	17	2	23
	1	30	10	4	Rejeté 3 minutes après.	2	32	1	46
Oxide blanc de Plomb.	1	5	10	3	Rejeté une heure après	Mortes pendant la nuit.			
	1	30	10	3	Rejeté quelqu. min. après.				
Oxide rouge de Mercure par l'acide nitrique	1	10	10	4	Contraction.	3	22	1	38
	1	20	10	4	Idem.	2	46	2	11

Substances avalées et réduites en pilules.	*Grenouilles soumises aux expériences.*	*Poids des substances avalées.*	*Heure, à laquelle elles ont été avalées.*		*Observations.*	*Mort.*		*Tems, pendant lequel elles ont conservé l'irritabilité reconnue par la pile galvanique*	
			heur.	min.		heur.	min.	heur.	min.
Tartrite antimonié de Potasse.	1	5 centigr.	10	22	10 min. après elle faisait des sauts.	10	55	2	3
Noix Vomique.	1	15	9	40	Agitation continuelle.	10	3	1	58
	1	30	9	41	Idem.	10	40	2	3
	1	40	9	42	Idem.	10	51	1	49
	1	50	9	43	Idem.	9	58	2	6
Opium du Commerce.	1	5	10	6	Rejeté 20 minutes après.				
	1	10	10	6					
Extrait gommeux d'Opium.	1	5	10	5	Spasme très-fort 10 minutes après.				
	1	10	10	5		10	49	2	18
Extrait de Cigüe (*Conium maculatum*)	1	15	10	4	Assoupie peu de min. après.	11	10	1	38
	1	30	10	5	Idem.	10	57	1	59
	1	40	10	6	Id.	11	5	1	43
	1	50	10	7	Id.	11	2	1	52
Extrait de Rhus radicans.	1	15	10	12	Convulsions.	11	5	2	23
	1	30	10	13	id.	10	54	1	43
	1	40	10	14	id.	10	48	2	1
	1	50	10	15	id.	10	40	1	48
Extrait de Laitue sauvage (*Lactuca virosa.*)	1	15	10	18					
	1	30	10	19	Assoupie.	12	50	1	56
	1	40	10	20	Id.	12	22	2	7
	1	50	10	21	Id.	11	51	2	11

Substances avalées et réduites en pilules.	*Grenouilles soumises aux expériences.*	*Poids des substances avalées.*	*Heure, à laquelle elles ont été avalées.*	*Observations.*	*Mort.*	*Tems, pendant lequel elles ont conservé l'irritabilité reconnue par la pile galvanique*
			heur. min.		heur. min.	heur min
Extrait de Coques de levant (*Menispermum Cocculus.*)	1	10 centigr.	10 7	Au bout de 25 minut. elles furent attaquées par un spasme très-violent, et moururent après avoir poussé un cri.	10 51	1 55
	1	20	10 7		10 32	1 49
Phosphore	1	2, 5	10 18	Agitation continuelle.	1 47	2 13
	1	5	10 18	id.	11 16	
	1	10	10 18	id.	10 43	2 41
Cantharides	1	Une avalée.	10 18	Elle vécut 26 heures.		
Eau de Laurier-Cerise.	1	3 gouttes.	8 44			
	1	6	8 44			
	1	8	8 44			
		12	8 45		9 32 du soir.	
	1	15	8 45		8 14 id.	1 46
	1	20	8 45		3 6	2 8
Ammoniaque liquide.	4	Une goutte à chacune.		8 minut. après elles expirèrent toutes.		

TROISIÈME SÉRIE DES EXPÉRIENCES ET OBSERVATIONS.

Le but principal de cette série, qui a eu lieu en décembre dernier, a été de connaître, par le moyen de la dissection, quel était le système que chaque substance avait attaqué préférablement aux autres; à cet effet, M.r ROSSI a examiné avec soin les différentes parties de chaque animal en présence de MM.rs VASSALLI-EANDI et BORSARELLI, ainsi que de plusieurs autres personnes.

Les grenouilles empoisonnées le soir, avec les mêmes doses indiquées dans la série précédente, ont offert le lendemain matin ; les phénomènes suivans (*a*).

Avec le Muriate sur-oxigéné de mercure — La grenouille était morte. On a observé que les tégumens étaient compactes, et très-adhérens aux parties qu'ils recouvraient; les muscles très-pâles et résistans au tranchant; les parois de l'abdomen gangrénées, ainsi que le foie; le ventricule, et le commencement des intestins très-durs et parsemés, dans leur intérieur, de taches gangréneuses; qu'en coupant et en tirant les nerfs ils résistaient beaucoup moins que dans l'état naturel; le système artériel rempli de sang très-noir et en état de putréfaction. On n'a point eu d'effets par le galvanisme.

(*a*) On ne parle point dans les rapports suivans des parties, qui n'étaient pas essentiellement changées.

Avec l'Oxide de Cuivre = La grenouille n'était qu'en état de convulsion, lorsqu'on l'a ouverte; on a observé les tégumens très-résistans, les muscles pâles, le foie engorgé, très-jaune et fort près de la putréfaction; l'estomac gangréné à sa grande extrémité; tous les autres viscères du bas-ventre engorgés de sang. Les effets galvaniques ont été très-forts, et d'une assez longue durée.

Avec les Oxides rouge, blanc, et demi-vitré de plomb. = La 2.e grenouille, savoir celle qui avait englouti l'Oxide blanc, était morte, les autres vivaient encore Leur dissection nous a offert les tégumens sans consistance, l'estomac enflammé et distendu par du gaz, les intestins resserrés, le foie noirâtre et en état de macération, le cerveau et les nerfs engorgés et mollasses, les muscles très-pâles et très-peu résistans au tranchant. Des effets galvaniques à peine sensibles dans les grenouilles vivantes, point du tout dans celle qui a été tuée par l'Oxide blanc de plomb, quoiqu'on l'ait empoisonnée en même tems que les autres: cet Oxide paraît être plus actif.

Avec l'Oxide rouge de Mercure. = La grenouille était morte, et on a remarqué une effusion sanguinolente à la tête, les muscles pâles et plus résistans qu'à l'ordinaire, l'estomac distendu par du gaz, des taches noirâtres près du pylore, le foie verd et putréfié; des effets galvaniques très-forts et d'assez longue durée.

Avec le Tartrite de potasse antimonié. = La gre-

nouille était morte. On a observé les muscles très-pâles et prêts à se putréfier, le foie très-volumineux et engorgé, l'estomac enflammé, ses parois épaissies, ainsi que celles des intestins grêles, les nerfs presque en état de putréfaction, et point d'effets galvaniques.

Une autre grenouille traitée de même, et disséquée au moment qu'elle ne donnait plus aucun signe de vie, a présenté un emphysème universel, l'estomac très-resserré avec les parois épaissies, le foie gangréné, le cerveau engorgé avec effusion sanguinolente dans ses cavités, les nerfs desséchés, les muscles pâles et roides. Les effets du galvanisme furent assez sensibles pendant quelques instans, après lesquels ils cessèrent; ils devinrent assez violents dès que l'on eût passé de l'acide muriatique oxigéné sur la face extérieure des muscles des extrémités postérieures : ayant cessé une 2.e fois, on les renouvella par l'immersion dans l'eau simple.

Avec la noix vomique. = La grenouille morte a offert les tégumens plus résistans qu'à l'ordinaire, une effusion sanguinolente au-dessous de ceux de la tête, les muscles pâles, le cerveau très-mou avec effusion sanguinolente dans sa cavité, l'estomac distendu par du gaz, avec des parois très-résistantes. Point d'effets galvaniques.

Avec l'eau de Coques de lévant (Menispermum Cocculus). = La grenouille était encore vivante. On a trouvé les tégumens coriacés, les muscles très-pâles,

engorgés de lymphe, et disposés à la gangrène, l'estomac presque en état naturel, les vaisseaux artériels remplis de sang noir, le cerveau et les nerfs en état naturel, des effets galvaniques assez forts, mais de très-peu de durée.

Une autre grenouille soumise à la même épreuve, et encore vivante, nous a offert les tégumens très-près de la putréfaction, l'estomac et les intestins resserrés, leur tissu coriacé, le cerveau mollasse, les nerfs résistans, et des effets galvaniques très-forts.

Avec l'eau de Laurier-Cerise. = La grenouille morte a présenté un emphysème universel, les muscles très-pâles et peu résistans, l'estomac enflé de gaz, les intestins enflammés, les vaisseaux sanguins à-peine visibles, les nerfs très-peu résistans, le cerveau noirâtre, et presque point d'effets galvaniques.

Dans une autre grenouille traitée de même, et encore vivante, on a observé l'emphysème universel, l'estomac et les intestins enflammés, le cerveau et les nerfs très-mollasses, un épanchement sanguinolent dans la cavité de la tête, et des effets galvaniques à-peine sensibles pour un instant.

Avec l'extrait de Cigüe. = La grenouille morte avait les tégumens presque en état naturel, une effusion sanguinolente au-dessous de ceux de la tête, et dans la cavité du crâne, les yeux presque hors des orbites, les muscles d'un rouge foncé, ceux de l'abdomen livides, les vaisseaux sanguins remplis de sang noir, le

foie livide et prêt à se putréfier, l'estomac et les intestins grêle, enflammés, avec les vaisseaux remplis de sang. On n'a obtenu aucun effet galvanique.

Dans une autre grenouille soumise à la même épreuve, et qui donnait encore quelques signes de vie, on a observé les tégumens très-peu résistans, une effusion sanguinolente au-dessous de ceux de la tête, les muscles très-flasques, le cerveau très-mou, avec effusion séreuse, le foie noir et engorgé, l'estomac gangréné, rempli de gaz; et quelques très-petits effets galvaniques.

Avec l'extrait de Rhus radicans. = La grenouille morte a offert les tégumens beaucoup plus résistans que dans leur état naturel, une effusion sanguinolente au-dessous de ceux de la tête, les muscles d'un rouge livide, très-peu d'effusion dans la cavité du crâne, l'estomac, et les intestins grêles, très-disposés à la gangrène, et quelques petits effets galvaniques.

Dans une autre grenouille traitée de même, et morte aussi, on a observé un emphysème universel, les tégumens en état de putréfaction, les muscles abreuvés de lymphe, avec des taches noires, l'estomac, le foie et les intestins en état de gangrène, le cerveau et les nerfs engorgés de lymphe. Point d'effets galvaniques.

Avec l'extrait de Laitue sauvage. (Lactuca virosa). La grenouille morte a présenté les tégumens prêts à se putréfier, un épanchement sanguinolent au-dessous d'eux, spécialement à la tête, les muscles très-pâles,

les vaisseaux remplis de sang noir, les nerfs plus résistans qu'à l'ordinaire, et plus petits; le cerveau sans consistance, presque tous les viscères du bas-ventre gangrénés, et point d'effets galvaniques.

Dans une autre grenouille soumise à la même expérience, et morte aussi, les nerfs étaient beaucoup plus résistans qu'à l'ordinaire, le cerveau engorgé de sang, l'estomac et le foie gangrénés, et il n'y a point eu d'effets galvaniques.

Avec l'extrait gommeux d'Opium, de Baumé. = La grenouille donnait encore quelques signes de vie. Les muscles étaient pâles, abreuvés de lymphe, et très-peu résistans, les vaisseaux remplis de sang, il y avait une effusion sanguinolente dans la cavité du crâne, l'estomac était très-peu enflammé, et on n'a eu presque aucun effet galvanique.

Dans une autre grenouille soumise à la même épreuve, et encore vivante, on a remarqué une effusion sanguinolente au-dessous des tégumens seuls de la tête, les muscles très-pâles et peu résistans au tranchant, les vaisseaux pleins, le cerveau et les nerfs engorgés, avec un épanchement dans la cavité du crâne, l'estomac rempli de gaz, des effets galvaniques très-peu sensibles: tant-soit-peu augmentés par l'acide muriatique oxigéné, et point-du-tout par le moyen de l'eau.

Avec des Cantharides. = La dissection de cette grenouille, qui était encore en vie, a présenté les muscles pâles, le volume du cerveau augmenté, l'œsophage

et l'estomac enflammés intérieurement, et point du tout extérieurement, des effets galvaniques assez marqués pendant quelques instans.

Dans une autre grenouille traitée de même, et encore vivante au moment de la dissection, on a observé le cerveau et les nerfs fortement résistans, l'œsophage, l'estomac et les intestins, sur-tout les grêles, enflammés, l'estomac rempli de gaz, parsemé intérieurement de taches noirâtres, en particulier autour du pylore, des effets galvaniques assez visibles, mais de courte durée, et que l'acide muriatique oxigéné n'a pu reveiller.

Avec du Phosphore. = La grenouille morte offrait l'aspect du tétanos, les tégumens prêts à se putréfier, avec une effusion de sang au-dessous, spécialement à la tête, l'estomac rempli de gaz, et livide intérieurement, les vaisseaux remplis de sang, des effets galvaniques à peine sensibles.

Avec de l'Acide phosphorique. = La grenouille morte présentait les tégumens très-résistans, avec une effusion de sang très-abondante au-dessous de ceux de la tête, l'estomac enflammé, les vaisseaux sanguins très-pleins, les muscles d'un rouge plus foncé qu'à l'ordinaire, le cerveau très-mou, des effets galvaniques assez sensibles, fort augmentés par l'acide muriatique et par l'eau que l'on passait sur la surface extérieure; très-prononcés et de longue durée, en plongeant les ex-

trémités postérieures dénuées de tégumens dans un mélange de ces deux liquides.

Avec de l'Ammoniaque. La grenouille étant morte, on a observé les tégumens coriacés, les muscles roides, le corps, pour ainsi dire, desséché, l'œsophage et le ventricule enflammés, les autres viscères du bas-ventre diminués de volume, le cerveau et les nerfs presque dans leur état naturel, et point d'effets galvaniques.

Une autre grenouille soumise à la même épreuve et qui était aussi morte, a offert les tégumens très-résistans, les muscles très-pâles et abreuvés de lymphe, le cerveau et les nerfs plus résistans au tranchant, une effusion sanguinolente dans la cavité du crâne, l'æsophage, l'estomac et les intestins enflammés, la surface intérieure de l'estomac presque livide, le foie gangréneux, et point d'effets galvaniques.

OBSERVATIONS

ENTOMOLOGIQUES

PAR FR.-A. BONELLI.

DEUXIÈME PARTIE.

Lue dans la Séance du 3 Mai 1813.

La première Partie de mes Observations entomologiques, insérée dans le IV.e Volume des Mémoires de l'Académie, a produit à-peu-près l'effet que je souhaitais : les Naturalistes y ont vu, si non l'accomplissement, du moins le projet d'un grand travail sur les insectes de la famille nombreuse et intéressante des Carabes, et plusieurs d'entre eux se sont empressés avec tout le zèle et le désintéressement imaginables, de concourir à m'enrichir dans ce genre, et à me procurer par-là les moyens de donner à mon travail toute l'étendue et le degré de perfection que l'on peut désirer dans l'état actuel de la science. Je saisirai à mon tour cette occasion pour leur témoigner publiquement toute ma re-

connaissance (*). En particulier je nommerai Monsieur Frédéric de Sanvitale de Parme, qui par amitié a bien voulu me prêter toute sa Collection de Carabes conjointement à celle de feu le D.r Rossi de Pise qui m'a été d'un grand secours pour la synonymie de la *Fauna etrusca* (**). M.r le D.r Gravenhorst, Professeur d'histoire naturelle à Breslau, qui m'a également envoyé ses Carabes et cédé tous ceux qui me manquaient: M.r Ziegler, Administrateur du Cabinet Impérial de Vienne, qui m'a enrichi d'une suite assez nombreuse de Carabes de l'Allemagne; MM.rs le D.r Klug et Schüppel de Berlin, qui m'ont, entre autres, envoyé plusieurs jolies espèces du Nord de l'Europe et de l'Amérique: M.r Politeo-Niseteo de Gorice, qui m'a fait connaître les différens Carabes des Provinces Illyriennes. M.r Lorey, Docteur-Chirurgien major à Vérone, qui m'a transmis quelques jolies espèces, entre autres, deux nouvelles des montagnes de la Carniole. M.r Drapiez, Secrétaire de la Société de Lille, à qui je dois la communication de

(*) Les Entomologistes ont déjà vu dans la première partie combien je devais à l'amitié dont m'honore M. Maximilien Spinola de l'Académie de Gênes, et auteur de l'ouvrage: *Insectorum Liguriæ Species novæ aut rariores; Genuæ* 1805-8. Ce Savant qui m'a d'ailleurs enrichi de plusieurs hyménoptères et autres insectes, a eu la bonté de me prêter sa belle collection de Carabes dans un tems où ne faisant qu'ébaucher mon travail, la mienne se réduisait à très-peu de chose. Sa collection m'a été alors d'autant plus utile, que c'était la seule de celles dont je pouvais disposer, qui renfermât les principales espèces du Nord. Je dois également à son amitié la connaissance, et l'usage de quelque ouvrage de sa Bibliothèque.

(**) *Fauna Etrusca, sistens Insecta quae in Provinciis florentina et pisana collegit* Petrus Rossius, *pp. Liburni et Pisis* 1790-4. *vol.* 4. *in*-4.o

sa Collection, et de celle de la Société; M.r Preudhomme de Neuwied, qui m'a transmis un choix des Carabes des environs de cette Ville: M.r Bourgeois de Lyon, possesseur d'une riche collection d'insectes d'Europe, et qui a eu la complaisance de m'envoyer tous ses Carabes, et de me céder tous les doubles qui me convenaient. M.r Baudet-la-Farge, Juge de Paix à Maringues, qui m'a fait connaître les Carabes de ses montagnes, parmi lesquels deux absolument nouveaux. M.r Walner de Genève, connu par l'étendue de ses relations, et qui m'a cédé plusieurs espèces étrangères et indigènes qu'il s'était procuré pour moi. Enfin M. de Clairville, Auteur de l'Entomologie helvétique, m'a aussi enrichi dans le tems de quelques espèces que je désirais, et tout récemment M.r le Baron Déjean, Général de brigade et Aide-de-camp de l'Empereur, de retour d'Espagne où il a formé une nombreuse collection d'Entomologie, a eu la bonté de m'envoyer une suite de Carabes d'Espagne et de Portugal avec des indications sur les nouvelles espèces qu'il y a découvertes, et le catalogue de sa collection en ce genre.

Un voyage que j'ai fait en France pendant les années 1810 et 1811 m'a encore fourni l'occasion de voir et de décrire une quantité très-considérable de Carabes rares ou nouveaux. Parmi les collections entomologiques que j'y ai examinées, et dont les propriétaires, à qui je m'empresse de rendre ici un tribut de reconnaissance, ont mis à ma disposition les échantil-

lons qu'il me fallait décrire ou dessiner, je nommerai surtout les suivantes : Celle de M.r le Professeur Jurine à Genève, une des plus riches, et certainement la mieux soignée de toutes celles que j'ai vues. La manière dont ce savant Correspondant de l'Académie, qui m'honore de son amitié, m'a accueilli pendant le long séjour que j'ai dû faire à Genève, est au-dessus de toute expression, et rien ne pourra me faire oublier ces beaux jours que j'ai passés dans le sein de sa famille à parcourir son Cabinet aussi riche en insectes, que précieux en minéraux, et fourni en livres d'histoire naturelle : Celle de M.r Boissier, Recteur de l'Académie de Genève, où entre autres j'ai vu quelques-unes des espèces décrites par Olivier et Fabricius dans l'ancienne Collection de Gigot d'Orcy, dont M.r Boissier avait fait l'acquisition : Celle de M.r Olivier à Paris qui m'a fourni la synonymie certaine de plusieurs espèces douteuses de sa grande Entomologie. Celle de M.r Latreille nombreuse en espèces d'Europe, et en contenant en outre plusieurs autres très-rares des deux Amériques et de la Nouvelle Hollande surtout. Je tiens de l'amitié de ce savant Entomologiste, entre autres choses, quelques Carabes et Cicindèles des contrées susdites, comme je dois également à M.r Olivier différentes espèces nouvelles qu'il a rapportées de ses voyages en Perse et en Syrie. La Collection du Museum d'histoire naturelle de Paris, riche en Carabes d'Amérique, d'Afrique et des Indes, m'a fourni quelque nouveau genre et plusieurs espèces

nouvelles qui ne se voyent dans aucune autre; je saisis avec empressement cette occasion pour témoigner ma reconnaissance à M.r le Professeur de Lamarck, qui avec sa bonté ordinaire et tout le zèle qui l'anime pour l'avancement de la science, a bien voulu me permettre toutes les facilités qui m'étaient nécessaires pour mon travail au Musée. Celle de M.r Dufresne Aide-naturaliste au Jardin des plantes, précieuse par la quantité des espèces étrangères et marquantes qu'elle renferme. C'est à l'amitié de M.r Dufresne que je dois quelques espèces nouvelles de l'Ile de France que je décrirai en son tems: Celle de M.r Brongniart, Directeur de la Fabrique Impériale de Sèvres, laquelle m'a également fourni quelque espèce nouvelle, et particulièrement une des Antilles qui formera probablement un nouveau genre à côté des Panagés, et dont M.r Brongniart a eu la bonté de me céder généreusement le seul individu qu'il en possédait; Enfin celle de M.r Savigny, Membre de l'Institut d'Égypte, à l'amitié duquel je dois la communication et la possession de plusieurs espèces nouvelles d'Égypte, de Syrie, et d'Arabie, qu'il fera connaître lui-même incessamment dans les prochaines livraisons de la grande histoire de l'Égypte qui se publie pour compte du Gouvernement.

Il est encore des Collections moins considérables que celles dont je viens de parler, et dans lesquelles j'ai cependant trouvé quelque chose à ajouter à ma liste des Carabes, telles sont celles de MM. Duponchel,

Serville, Sallé, et Le-Vaillant fils, à Paris; celle de M.r Le-Roux à Versailles, et celles de M.r Banon, Professeur à Toulon; je dois même quelques espèces uniques de sa Collection à M. Duponchel.

Malgré tous ces secours, je suis bien loin de croire d'avoir entièrement rempli mon but, et examiné tous les Carabes existans dans ces différentes collections.

D'abord le tems que je pouvais y consacrer, n'était qu'une bien foible portion de celui qui restait à ma disposition, ensuite la difficulté des distances, des tems opportuns, et plus que tout l'abondance de la matière elle-même relativement au tems que j'ai pu employer, sont autant de raisons qui m'ont empêché de rassembler tout ce que Paris offrait dans ce genre. C'est ainsi que la Collection de M.r le Professeur Duméril assez jolie d'ailleurs, a été oubliée, que celle de M.r Bosc, une des plus riches qui existent, s'est trouvée à-peu-près dans le même cas et que plusieurs de celles citées plus haut n'ont été qu'effleurées, ou au plus épuisées dans quelques genres seulement.

Ces motifs joints à des occupations particulières qui ne me permettront de reprendre mon travail que dans quelques années d'ici, sont ceux qui me déterminent à renvoyer sa continuation à l'époque où moins pressé par les circonstances, je pourrai m'y livrer entièrement pour quelque tems au moins, et exécuter les nouveaux voyages que je me propose de faire, et que je crois indispensables pour donner à la monographie que je prépare

toute l'étendue, et les avantages dont je la crois susceptible.

En attendant cette époque je crois faire une chose agréable aux Entomologistes que de leur donner d'avance, si non toutes les observations que j'ai faites jusqu'ici sur les insectes de la famille des Carabes, et dont la rédaction seule exigerait plusieurs mois de travail, au moins une description succinte, mais exacte et suffisante des espèces que j'ai déjà rassemblées, et que je crois nouvelles, ainsi que les caractères essentiels des nouveaux genres, que je crois nécessaire d'établir dans cette même famille.

La difficulté de se procurer tous les ouvrages qui paraissent journellement, surtout en Allemagne, augmentée encore par les circonstances actuelles, pourra quelques fois me faire tomber dans des duplications d'espèces. A cet inconvénient que je ne saurais éviter pour le moment, je tâcherai de remédier par la suite à mesure que ces ouvrages parviendront à ma connaissance, me protestant d'avance que je ne tiens nullement à mes noms, et que j'abandonnerai de bon gré ceux que j'aurai donnés à mes espèces nouvelles toutes les fois que j'en connaîtrai, ou qu'on m'en faira connaître des antérieurs.

La quantité des espèces et même des nouveaux genres que j'ai examinés depuis la publication de la première Partie de ces Observations, ne me permet plus de suivre dans cette 2.e Partie le même ordre que j'avais indiqué

et suivi dans la première; ainsi les genres y seront seulement groupés suivant les rapports qui les assimilent, en sous-familles plus ou moins naturelles, qui se succéderont presque indistinctement, et auxquelles, pour ne point surcharger la science de nouveaux noms, je me bornerai à donner celui du genre principal qu'elles renferment.

Je ne reviendrai point ici sur les sous-familles et les genres dont j'ai traité dans la première partie, quoique j'aie bien des choses à y ajouter, mais en réservant pour un mémoire supplémentaire ce que j'aurai à dire sur les Carabes de la première section, je passerai immédiatement à quelques-unes des sous-familles de la deuxième section ou de celle qui comprend les Carabes à jambes antérieures échancrées du côté interne, quelle que soit d'ailleurs la manière dont se terminent leurs élytres, ce caractère ainsi que quelques autres que j'avais d'abord employés, n'étant point susceptible d'être appliqué aux genres exotiques à moins qu'on veuille compter pour rien tous les autres rapports qui lient certains genres entre-eux et dont la sous-famille des Anthies va nous fournir sous peu un exemple.

Je manquerais à un de mes devoirs, si avant de commencer, je ne profitais point de cette occasion pour témoigner aussi les obligations que j'ai aux amis qui, placés plus près de moi que tous ceux dont j'ai déjà fait mention, me communiquent journellement leurs découvertes et m'aident de leurs conseils: Ce sont

d'abord le D.r Rubinetti, qui, après avoir long-tems chassé aux environs de Turin et de Carmagnole, me fit à mon retour de Paris, cession amicale de tout ce qu'il y avait trouvé; le D.r Ferrero, qui s'est plus particulièrement adonné à la recherche des insectes des environs de notre ville, et dont il possède une Collection très-soignée; M.r Peirolery procureur-gérent du Lycée, qui par ses courses réitérées et son zèle, a formé en peu d'années une très-belle Collection de Coléoptères surtout, et dont font partie plusieurs Carabes précieux.

La Collection de feu le Médecin Ponza, contenant les Coléoptères, qui font le sujet du Mémoire inséré dans le Vol. de l'Académie pour les années 1805-1808, avec le titre *Coleoptera Salutientia*, m'a également fourni quelques individus rares, dont je dois directement la possession à notre Collègue le Professeur Buniva, à qui le Médecin Ponza l'avait cédée de son vivant. Ils m'ont aussi été communiqués quelques Carabes rares trouvés soit dans la Vallée de Suse, soit aux environs de Carignan, par le D.r Ré, Professeur à Carignan, et Correspondant de l'Académie.

Enfin M.r Pérotti employé à la recherche des minéraux pour le Musée de l'Académie universitaire, par les soins qu'il prend à la recherche des insectes dans les lieux et les momens où celle des minéraux serait inutile, a aussi beaucoup contribué à me faire connaître plusieurs Carabes indigènes de notre même pays; mais qui n'habitant que des endroits très-écartés, et peu accessibles des Alpes, auraient peut-être toujours échappé à l'Entomologiste le plus zélé.

2.e PARTIE.

(CONTINUATION DES CARABIQUES.)

I.er *MÉMOIRE.*

SOUS-FAMILLE DES LICINES.

Il est dans la famille des Carabiques une petite sous-famille assez naturelle et facile à distinguer à la forme de la tête et à la longueur des palpes. C'est celle qui comprend les Genres *Licinus* et *Badister* établis le 1.er par Latreille, le 2.e par Clairville, auxquels j'en ajouterai un nouveau que j'appelerai *Dicaelus* pour y comprendre trois ou quatre insectes encore inédits, propres de l'Amérique septentrionale.

Le caractère de cette petite famille consiste essentiellement à avoir

1.° Une tête sans cou, courte, et comme tronquée.

2.° Les palpes maxillaires extérieures et les labiaux proportionnellement assez longs, et terminés par un article tronqué.

3.° La lèvre inférieure à large échancrure sans dent.

G. BADISTER. *Clair. Latr.*

Outre l'espèce commune, le *BAD. bipustulatus*, sur laquelle le Genre a été établi, j'y rapporte les trois suivantes, dont les deux premières sont nouvelles.

1.re Espèce. *BADISTER uni-pustulatus. Mihi.*

« *BAD. . . palpis labialibus truncatis, niger, antennarum basi, palpis, thorace, elytrorum basi maculaque angulosa ante apicem, pedibusque rufis.*

Ce Badister, particulier à l'Italie, ressemble beaucoup pour la forme comme pour les couleurs au *Badister bi-pustulatus*: mais il est trois fois plus grand, et la tache rousse commune des élytres, qui est ronde dans le *bi-pustulatus*, est au contraire transverse dans le notre, et se termine de chaque côté par un angle très-prononcé; cette même tache est également anguleuse sur son bord antérieur, et ne communique nullement avec la base des élytres, la portion noire de ceux-ci n'étant point interrompue à la suture, mais continüe, et touchant également leurs bords latéraux.

2.e Esp. *BADISTER humeralis. Mihi.*

» *BAD. . . palpis labialibus acutis, niger, antennis palpisque piceis, elytris macula exteriore baseos, limbo, pedibusque pallidis.*

Cette espèce a la taille et les proportions de la suivante, c'est-à-dire, 4 millimètres de longueur, sur 1 et $\frac{3}{4}$ de largeur. Sa tête est noire avec les

antennes, couleur de poix à leur base, et jaunâtres depuis le 4.ᵉ ou le 5.ᵉ article. Les palpes comme les premiers articles des antennes couleur de poix, excepté le dernier bout qui est blanc. Le corselet est noir-luisant, avec les bords latéraux plus clairs. Les élytres sont planes, obliquement tronquées à leur extrémité, striées, avec le bord extérieur et une petite tache ovale à leur base, pâles, leur bord ainsi que dans la plupart des Carabiques, est punctué. Le corps est noir en dessous, et les pieds sont testacés.

J'ai trouvé cet insecte en Piémont. M.ʳ Le-Roux de Versailles l'a aussi trouvé aux environs de cette ville.

La description est tirée d'un individu femelle.

3.ᵉ Esp. *BADISTER peltatus : Carabus Creutz. Panzer Fn. ins. Germ. Fasc.* XXXVII, *n.*° 20.

Espèce noire à pattes rousses, d'Allemagne et de Suède.

OBSERVATION. Ces deux dernières espèces sans former un genre particulier, peuvent entrer dans une petite division du même genre *Badister*, laquelle aurait pour caractère un petit appendice blanc, conique, et presque pointu au dernier article des palpes labiaux, qui le fait paraître ovalaire. Cette portion additionnelle du palpe paraît par sa couleur blanche et comme transparente ne point former partie du même palpe, ou pour mieux

dire, ne point contribuer à lui donner une autre conformation, car la portion d'article qui la précède, et qui par sa couleur et consistance analogue à celles du restant du palpe paraît devoir seule être considérée dans la méthode, conserve la même forme et les mêmes proportions qui caractérisent les palpes labiaux des autres insectes du même genre.

G. LICINE. *Latr. Clairv.*

Je rapporte à ce genre 7 espèces.

1. *Lic. emarginatus Latr. Carabus cassideus Fab.*
2. . . . *depressus Car. Payk. Carabus cassideus Ill.*
3. . . . *hoffmansegii. Carabus Panzer.* LXXXIX. 5.
4. . . . *agricola Latr.*
5. . . . *Silphoides Latr.*
6. . . . *Peltoides. Illig.* Espèce particulière au Portugal, et qui paraît se trouver aussi en Toscane. Un individu de ce Licine faisait partie de la Collection des Carabes de feu le D.r Rossi, que M.r Fréderic Sanvitale a eu la bonté de me prêter. Voici sa description :

» *Licin. apterus, niger, opacus, totus punctulatus, elytris subsulcatis.*

Taille et forme du *Licinus emarginatus*, dont il ne diffère bien essentiellement que par les élytres très-profondément striées, les stries au nombre de 9. Les élytres sont presque soudées ensemble, et ne recouvrent point d'aîles.

7. . . Espèce nouvelle que je dois à l'amitié de M. Savigny qui l'a rapportée d'Égypte.

G. DICÆLUS. Nouv. genre.

Caractère essentiel du genre (*).

« Mandibules pointues, et assez saillantes.

« 4.e Article des palpes très-dilaté à l'extrémité et comme triangulaire.

« Corselet inégal, plus large à la base, échancré antérieurement et postérieurement.

Ce genre ne renferme que des espèces propres de l'Amérique septentrionale, et qui se font remarquer par leur forme assez large, pointue postérieurement à-peu-près comme dans les *Carabus frigidus, cisteloides etc.*, leurs élytres ont à la base une forte carène, qui de l'angle extérieur s'étend obliquement jusque vers le milieu. Elles sont soudées, et ne recouvrent point d'aîles.

La tête porte sur le devant deux enfoncemens très-considérables, qui seuls suffiraient pour faire distinguer ces Carabiques de tous les autres; c'est de ces deux impressions que j'ai tiré le nom *Dicaelus* que je donne à ce nouveau genre.

Les mâles ont les trois premiers articles des tarses antérieurs très-dilatés.

Suit la description de 4 espèces de ce genre.

(*) Abstraction faite des notes qui le distinguent des genres des autres sous-familles, et qui sont déjà comprises dans le caractère essentiel de celle-ci.

1.° *Dicælus purpuratus N. Sp.*

» *Dic. . . thorace transverso , niger , purpureo irro-*
» *ratus , elytris sulcatis , corpore abbreviato , dilatato.*

Longueur du mâle 20. millim., largeur 8 ½.

Longueur de la femelle 22 millim., largeur 9.

Il a la forme courte et large du *Carabus platysma Ill.*, mais il est presque d'une fois plus grand. Tout son corps est noir mat avec une légère nuance de couleur pourpre qui n'est pas même bien visible dans tous les individus. Son corselet plus large que long, a les bords latéraux très-relévés et une impression oblique de chaque côté de la base, très-prononcée; les élytres sont marquées de 8 sillons simples, qui se réunissent deux à deux avant l'extrémité.

Je conserve à cette espèce le nom que M.^r le Dr Illiger lui a donné dans la Collection du Comte d'Hoffmansegg, et avec lequel je l'ai reçue de M.^r le Dr Klug de Berlin.

Une femelle de cet insecte apportée de la Caroline par Mr Bosc, portait dans la Collection de Mr Jurine à Genève le nom d'*Harpalus complanatus.*

2.° *Dicælus violaceus. N. Sp.*

» *Dic. . . Thorace transverso quadrato , viola-*
» *ceus , antennis , pedibusque nigris , elytris sulcatis.*

Il est deux fois plus grand que le *Carabus frigidus Fabr.* Sa longueur mesurée sur une femelle

était de 23 millim. et sa largeur de 9. Sa forme est à-peu-près celle de l'espèce précédente. Tout le corps est d'un beau violet, avec les antennes, la bouche et les pattes noires. Les élytres sont sillonées comme dans l'espèce précédente, et leurs syllons se terminent de même, le corselet qui est transversal n'est pas plus large à la base qu'antérieurement.

J'ai décrit cette espèce dans le Cabinet de M.r le Professeur Jurine, qui l'avait eue de M.r Bosc. Elle est originaire de la Caroline.

3.° *Dicælus elongatus. N. Sp.*

» *Dic. . . thorace subquadrato, niger, elytris*
» *sulcatis, corpore elongato.*

Port et grandeur du *Carabus frigidus Fab.* Longueur du mâle 16-17 millim., largeur 5 $\frac{3}{4}$-6. Tout l'insecte est noir obscur, avec les antennes grises dès le 5.e article.

Le corselet est aussi long ou presqu'aussi long que large, rétréci sur le devant, mais de la même largeur au milieu et à la base, où il est presque de la largeur du corps: ses bords latéraux sont fortement relevés depuis la base jusqu'au milieu, chacun des enfoncemens obliques de la base s'étend en avant au-delà du milieu du corselet, en s'effaçant insensiblement. Les élytres sont sillonées à l'ordinaire, et les sillons se réunissent aussi par paires avant leur extrémité; la côte humérale qui

est très-prononcée, se prolonge en diminuant insensiblement, jusque vers les deux tiers de l'élytre.

Je tiens cet insecte du Docteur Gravenhorst, Professeur d'histoire naturelle, à Breslau.

J'ai vu un second individu dans la Collection de M.r le Professeur Jurine étiqueté *Harpalus elatus*, et marqué comme venant d'Afrique, ce que j'ai beaucoup de peine à croire, d'autant plus que M.r Jurine ne l'avait pas eu de première main, et qu'il ne pouvait point par conséquent être certain de l'indication.

4.e DICÆLUS teter. *N. Sp.*

» *Dic. . . . thorace transverso, postice angustiore,*
» *ater, obscurus, elytris sulcatis, trunculo con-*
» *vexiusculo sub-ovali, corpore elongato.*

Très-voisin du *Dicœlus purpuratus*, mais plus étroit, et distinct spécialement du même comme de tous les autres insectes du genre par le corselet, qui est moins large à la base qu'à son milieu. Sa longueur totale est de 22 millimètres, sur 8 de largeur aux élytres, et 6 $\frac{1}{3}$ au corselet, les élytres sont sillonnées de la même manière que dans les espèces précédentes; tout l'insecte est noir obscur, excepté aux antennes qui sont grises dès leur 5.e article.

Cette espèce habite comme les précédentes, l'Amérique septentrionale; la femelle, dont j'ai tiré sa description, fait partie de la Collection du Muséum d'histoire naturelle de Paris.

SOUS-FAMILLE DES ANTHIES.

L'Afrique et quelque contrée de l'Asie fournissent une autre sous-famille de Carabes, remarquables par la grande taille de la plus part des espèces, et par la forme toute particulière de leur langue. Cette petite famille est composée du genre *Anthia* tel qu'il a été présenté par Latreille, et d'une ou de deux autres espèces formant un nouveau genre que j'appellerai *Helluo*.

La langue (*Ligula* FAB. *labium* LAT.) de ces insectes est toute cornée, assez saillante et large, de forme ovale, ou presque arrondie, convexe et lisse en dehors, et tout-à-fait déporvue des paraglosses ou de ces petites pièces membraneuses qui bordent le même organe dans tous les autres Carabiques.

Les élytres, qui ne recouvrent jamais d'aîles, sont presque toujours soudées, et leur extrémité est plus ou moins tronquée, même un peu échancrée dans quelques espèces.

Les jambes de devant portent une échancrure du côté interne.

La tête est toujours au moins aussi large que le corselet, qui a la forme d'un cœur, et qui est porté sur un pédicule ou avancement du tronçon.

Les palpes qui sont courts, se terminent ordi-

nairement par un article sensiblement plus gros et tronqué à son sommet.

G. Anthia.

On peut ajouter à la liste des espèces déjà connues de ce genre les trois suivantes, qui me paraissent nouvelles.

1. *Anthia 12-guttata.*

» A. *nigra, trunculo obovato* (*), *elytris* » *subsulcatis, punctis sex, margineque ante apicem* » *albis*.

Port de l'*Anthia 10-guttata*, mais un peu plus petite. Longueur du mâle 31-2 millim., largeur 10 $\frac{1}{2}$-11.

Les élytres n'ont que des sillons peu profonds, et portent chacune 6 points blancs outre un petit trait de la même couleur situé sur le bord extérieur un peu avant l'extrémité. Des 6 points qui sont tous arrondis, le premier un peu plus gros que les autres est situé sur le bord extérieur vers la base de l'élytre, le second un peu avant le milieu dans le disque, ou le 3.e sillon, le troisième et le quatrième sont placés un peu après la moitié de l'élytre, l'un vers la suture, l'autre vers le

---

(*) Pour plus d'exactitude, je restreins ici l'acception du mot *abdomen*, à la partie inférieure et terminale de l'insecte, ou le ventre proprement dit, et je me sers du mot tronçon *trunculus* pour indiquer l'ensemble de la poitrine, du ventre, de l'écusson et des élytres, autrement de tout ce qui reste du coléoptère à qui on aurait enlevé la tête, le corselet et les pattes.

bord extérieur; le cinquième et le sixième occupent l'extrémité, et sont situés l'un sur l'angle interne, l'autre sur l'externe de l'élytre.

Cet insecte se trouve en Arabie d'où il a été rapporté par M.r Olivier. C'est à ce même savant que je dois l'individu que j'en possède.

2. *Anthia 2-guttata.*

» *Anth. . . elytris quadrisulcatis, nigro-fusca,*
» *abdomine oblongo, elytrorum sulcis griseo-villosis*
» *tertio (a sutura) ante medium puncto albo.*,

Un peu plus petite que l'*Anthia 4-guttata*, et beaucoup plus etroite. Longueur de la femelle 27 millim., largeur 8.

Le corselet, qui est plus large que long, a la forme d'un cœur renversé, et porte sur la partie supérieure des enfoncemens où l'on aperçoit des poils cendrés; les élytres portent chacune 4 sillons couverts de poils cendrés, et dont le troisième porte un peu avant la moitié de l'élytre, un point blanc.

J'ai décrit cet insecte d'après des individus conservés dans le cabinet de Monsieur Boissier, Recteur de l'Académie de Genève, et dans celui de Monsieur Jurine.

3. *Anthia 10-sulcata.*

An Anthia villosa Schoenherr *Syn. ins. I. p.* 233, *N. 7?*

» *Anth. . . coleoptris 10-sulcatis, nigra, tho-*

» *race inæquali punctato, dorso glabro, elytris*
» *sulcis griseo-villosis immaculatis, sutura apice*
» *integra.*

Cette espèce est très-voisine de l'*Anthia 4-guttata*; mais elle en diffère en ce que les élytres ont chacune 5 sillons outre le sutural, qui est si petit et si court qu'on ne peut pas même l'appeller de ce nom, et que ces mêmes élytres ne sont point obliquement tronquées à leur bout, de sorte que la suture, qui est visiblement échancrée dans l'*Ant. 4-guttata*, est tout-à-fait entière dans notre espèce. Le sillon extérieur seul manque de poil, tous les autres en ont; les côtes qui les séparent sont lisses et luisantes, la 2.e et la 4.e se réunissent, et se prolongent jusqu'à l'extrémité de l'élytre, la 1.re et la 3.e sont plus courtes, la 5.e qui est la plus grande et paralelle au bord extérieur, se termine avec l'élytre elle-même. Longueur de la femelle 30 mill., largeur 10.

Du Cabinet de Monsieur Boissier.

Les autres espèces qui me sont connues et qui ne doivent point entrer dans le genre Graphyptère sont *Anthia tabida*, *Nimrod*, *6-maculata*, *maxillosa*, *10-guttata*, *4-guttata*, *6-guttata*, *thoracica et sulcata*

G. Helluo.

L'insecte qui sert de type à ce nouveau genre fait partie de la belle suite de productions de la

nouvelle Hollande rapportées par Perron et Lesueur, et qui ornent maintenant le Muséum d'histoire naturelle de Paris.

Monsieur Latreille en classant la Collection entomologique de cet établissement, a placé l'insecte en question à la fin des Anthies et l'a nommé *Anthia truncata*.

Le nom spécifique que ce célèbre entomologiste lui a donné, fait connaître d'abord un des caractères par lesquels cet insecte diffère éminemment des autres du genre Anthie: en effet aucune des espèces de ce genre n'a les élytres tronquées transversalement, l'*Ant. tabida* elle-même, dont les élytres paraissent déjà sous ce rapport si différentes de celles des autres Anthies, ne les a tronquées qu'obliquement, ou plutôt c'est le bord extérieur qui en se dilatant un peu plus vers l'extrémité de l'élytre, laisse entre lui et la même extrémité une espèce d'échancrure oblique, analogue à celle que l'on remarque plus ou moins sur presque tous les Harpales de Latreille.

Au caractère des élytres brusquement tronquées, notre insecte joint encore celui d'avoir un cou distinct, une dent dans l'échancrure de la lèvre, et un port qui tout en l'éloignant des Anthies, le rapproche singulièrement des insectes du genre *Cymindis*. Je l'aurais même placé à coté de ces derniers, si la considération de la forme de la

langue, qui ressemble à celle des Anthies, ne m'avait point paru, ainsi qu'à M.r Latreille, d'une importance majeure, et telle à ne point permettre d'éloigner des insectes qui l'ont semblable.

Caractère essentiel du genre.

« Mandibules sans dents.

« Langue cornée, convexe, arrondie, transversale, et « sans paraglosses.

« Lèvre à lobes prolongés et pointus, à échancrure « munie d'une dent courte et simple.

» Élytres tronquées brusquement à leur extrémité, et « laissant les derniers anneaux du ventre à découvert.

1. *Helluo costatus.*

Anthia truncata Latr. Museum d'hist. nat.

C'est la seule espèce qui me soit bien connue de ce genre. Elle est de la taille du *Carabus planus* Fab. ou un peu plus petite. Le mâle a, depuis l'extrémité des mandibules jusqu'à celle des élytres, 22 millim., et jusqu'à celle de l'anus, 24. Sa largeur est de 7 ½ millim. La femelle est d'un demi millimètre plus large, et d'un millimètre plus courte.

Tout l'insecte est de la couleur de la poix, et un peu luisant. La tête est ridée sur les côtés près les yeux ; le corselet qui est en forme de cœur, et à peine plus large que long est marqué de points enfoncés et de petites rides transversales. Les élytres sont pointillées, striées, et portent de

plus trois côtes assez élevées; la première entre la 3.e et la 4.e strie; la seconde entre la 5.e et la 6.e, et la troisième entre la 7.e et la 8.e strie à compter de la suture. Tout le corps est semé de poils, et chaque point des élytres en a un droit.

L'insecte a le port de la *Cymindis axillaris*, et son tronçon a une forme plus carrée qu'ovale.

Il habite au Port Jackson dans la Nouvelle Hollande; Musée d'histoire naturelle de Paris.

J'ai vu dans la Collection de Mr Jurine à Genève un Carabe, qui m'a paru avoir quelque rapport avec l'*Helluo costatus*, pour la forme du corps et des élytres. Je n'oserais cependant affirmer qu'il appartienne au même genre, n'en ayant point examiné les organes manducatoires.

SOUS-FAMILLE DES SIAGONES.

Latreille a établi sous le nom de *Siagona* un nouveau genre pour y placer un ou deux Carabiques que Fabricius avait décrits parmi les Cucujes et les Galérites, mais qui différaient essentiellement de ces derniers, non moins que de tous les autres Coléoptères par l'immobilité de la lèvre inférieure (menton Latr.), qui est soudée par sa base avec le restant de la tête, et qui dans le type du genre (le *Cucujus rufipes* Fab.) ne laisse pas même apercevoir de suture. Ayant eu occasion

dans mon dernier voyage, d'examiner d'autres espèces du même genre, ou tout au moins fort analogues, je me suis aperçu que ce caractère souffrait à l'égard d'une grande nouvelle espèce conservée au Musée d'hist. nat. de Paris, quelque variation en ce que la lèvre, tout en conservant son immobilité, se réunissait cependant et se soudait avec la tête de toute autre manière en laissant visibles les sutures, et que cette différence était accompagnée de quelques autres dans la forme des palpes et de la langue, plus que suffisantes pour l'établissement d'un nouveau genre que j'appellerai *Enceladus*, et qui avec celui des Siagones formera une sous-famille particulière ayant pour caractère :

« Lèvre inarticulée, à échancrure munie d'une dent bifide.
« Palpes terminés par un article beaucoup plus gros.
« Corps très-aplati, à corselet porté sur un pédicule.
(pieds antérieurs non fouisseurs.)

G. SIAGONA Latr.

Les Siagones que l'on reconnaît aisément à leurs palpes labiaux sécuriformes, et à leurs antennes sétacées avec le premier article plus long que les deux suivans pris ensemble, offrent des espèces aîlées et des espèces aptères; ces dernières ont leur tronçon ovale, leurs élytres qui sont soudées, ayant l'angle extérieur de la base arrondi; les autres l'ont en carré long, arrondi seulement à l'extrémité,

parce que leurs élytres qui sont séparés pour le déployement des aîles, ont l'angle huméral saillant, et sont à leur base aussi larges qu'au milieu.

* SIAGONES aptères, à base des élytres plus étroite.

1. *SIAGONA rufipes* Latr. *Cucujus* Fab.
2. *SIAGONA fuscipes.*

» *SIAG . . . aptera nigra, pedibus fuscis, trunculo*
» *subquadrato; thorace trisulcato.*

D'un tiers plus grande que la *rufipes*, et distincte par la couleur des pieds qui sont bruns-foncés, et par la forme du tronçon qui est beaucoup moins ovale, mais presque en carré long, parce que les élytres se rétrécissent moins à leur base.

Longueur 17 $\frac{1}{2}$. millim. Largeur 5 $\frac{1}{3}$.

Cette espèce est d'Egypte et m'a été donnée par Monsieur Savigny.

** SIAGONES aîlées; à élytres d'égale largeur par-tout.

3. *SIAGONA depressa. Galerita depressa* Fabr.
4. *SIAGONA plana.*

» *SIAG . . . . alatá nigra, thorace trisulcato, pe-*
» *dibus rufis.*

Deux ou trois fois plus petite que la *Siagona rufipes* dont elle diffère encore par la forme carrée du tronçon et la présence de deux aîles complettes.

Longueur. 10 $\frac{1}{2}$. mill. Largeur. 3 $\frac{1}{2}$.

Dans l'individu que j'en possède et qui me vient de M.[r] le D.[r] Klug, le corselet porte 3 sillons, dont

les latéraux assez profonds, et bien marqués occupent toute la longueur du corselet, et l'intermédiaire large, peu profond et comme partagé en deux par une légère ligne élevée, n'occupe que la moitié postérieure du dos: Mais dans un individu que j'en ai examiné dans la Collection de M.r Boissier, (*) qui ressemblait d'ailleurs tout-à-fait au précédent, le sillon de milieu était étroit et bien prononcé comme les latéraux.

J'ai vu dans la même Collection un troisième individu qui ressemblait au mien que j'ai décrit, mais qui était d'un tiers plus petit et n'avait que 9 millim. de longueur, sur 2-½ de large. Il y était nommé *Carabus lunulatus* Meg. C'est peut-être le mâle du premier.

Cette espèce vient des Indes orientales.

Observation. Je crois avoir remarqué dans quelque individu de cette 2.e section des Siagones, des traces de suture à la lèvre inférieure, disposées comme dans le genre suivant, à cette différence près, que le prolongement de la lèvre entre les côtés de la gorge de l'insecte, ne s'avançait point assez pour séparer entièrement le dessous de la tête en 2 parties, mais se terminait circulairement beaucoup avant le trou occipital.

(*) Il y était étiqueté *Carabus Sulcicollis* Meg.

G. ENCELADUS.

Caractère essentiel du genre.

« Palpes labiaux à dernier article tronqué transversa-
« lement.

« Langue proéminente au milieu, et arrondie.

« Lèvre soudée, se rétrécissant à la base, et se pro-
« longeant entre les côtés de la gorge jusqu'à l'ouver-
« ture postérieure de la tête.

« Antennes à premier article court, de la longueur du
« suivant.

A ces caractères on peut encore ajouter ceux non moins importans de la lèvre supérieure, qui est terminée en deux lobes arrondis, des palpes maxillaires extérieurs à dernier article tronqué très-obliquement, et des jambes antérieures sans échancrure interne; celle-ci étant portée tout-à-fait à l'extrémité de la jambe.

La seule espèce que je connais dans ce genre, est nouvelle et fait partie de la Collection entomologique du Muséum de Paris, où elle a été nommée par M.r Latreille *Siagona gygas*, et que j'appellerai par conséquent conformément aux principes:

1. *ENCELADUS gygas.*

C'est un insecte de la taille de l'*Anthia maxillosa*, aplati comme les Siagones, et tout noir. Sa tête est large, lisse, avec deux petits traits enfoncés entre les yeux. Ses mandibules sont courtes, arquées, pointues, et portent intérieurement

deux grosses dents, dont la première double. Les antennes sont petites et noires jusqu'au 3.e article. (Les articles suivans manquent à l'individu examiné). Le corselet est large, rebordé sur les côtés, à peine échancré sur le devant et à la base, avec le canalicule antérieur et celui du dos, courts et peu marqués, et un trait sur chaque angle postérieur, assez profond, et prolongé antérieurement jusque vers le milieu de la longueur du corselet. Le tronçon est de forme elliptique, et très-aplatie; les élytres sont soudées, marquées de 9 sillons environ, dont le 3.e et le 5.e portent du côté interne 4-6 points enfoncés. Les deux premiers sont entiers et séparés, le 3.e, le 4.e et le 5.e sont courts et réunis à leur extrémité, le 4.e et le 5.e le sont aussi à leur base; le 6.e et le 7.e courts se réunissent aux deux bouts, le 8.e et le 9.e sont entiers et occupent tout le bord extérieur de l'élytre, ce dernier est ponctué. L'écusson est très-petit et situé sur le pétiole; les aîles manquent.

Longueur du mâle 48 millim. Largeur 14.

SOUS-FAMILLE DES SCARITES.

Une des sous-familles plus naturelles et à la fois plus aisées à distinguer, est celle des Carabes fossoyeurs connus généralement sous le nom collectif de *Scarites*. Leur principal caractère distinctif con-

siste dans la forme palmée de leurs jambes antérieures, qui les rend propres à creuser la terre et le sable, leur séjour habituel. Ces digitations ou dents extérieures des jambes de devant varient en nombre comme en grandeur; mais quelques soient leur petitesse et leur petit nombre, elles sont toujours très-apparentes, et jamais moins de deux, excepté dans une ou deux Clivines, dans lesquelles on n'aperçoit que la terminale, qui est alors très-longue et arquée.

A ce caractère qui leur est exclusif dans la famille des Carabes, les Scarites en réunissent encore un second, qu'ils ne partagent qu'avec les Carabes de la sous-famille des Ditomes; et de celle des Siagones; c'est un avancement assez marqué du devant du tronçon, en forme de pédicule, et sur lequel est porté le corselet qui par là se trouve toujours plus ou moins séparé du restant du corps par une espèce d'étranglement ou de cou. Le corselet même se fait aussi remarquer par sa manière de se rétrécir brusquement à sa base, tandis qu'il s'élargit, et s'évase au contraire à son sommet pour recevoir une grande portion de la tête toujours très-grosse, et souvent aussi large que le corselet lui-même.

Le premier article des antennes de ces insectes est ordinairement beaucoup plus long que les autres.

Je rapporte à cette sous-famille 4 genres, savoir

le G. *Scarites* établi par FABRICIUS, le G. *Carenum* qui est nouveau et que je forme d'une espèce de la nouvelle Hollande que FABRICIUS et OLIVIER ont fait connaître sous le nom de *Scarites cyaneus*. Le G. *Pasimachus* également nouveau, et que je forme des *Scarites depressus* et *marginatus* de FABRICIUS, remarquables non seulement par l'*habitus* tout-à-fait différent de celui des vrais Scarites, mais aussi par leurs mâchoires entièrement dépourvues de crochet, et le G. *Clivina* établi par LATREILLE.

G. SCARITES.

Le genre des Scarites proprement dits, quoique peu nombreux en espèces, est cependant un des plus embrouillés. Les caractères dont on peut faire usage pour la distinction des espèces sont en très-petit nombre, les Scarites se ressemblant tous par les couleurs, et ne différant entre eux que très-peu par les stries, les points, et la forme du corps. Les 5 divisions que je vais proposer dans ce genre sont peut-être les seules qu'il soit possible d'y établir sur des caractères d'une certaine valeur, et qui rapprochent les espèces d'une manière naturelle.

* Jambes intermédiaires portant des épines perpendiculaires et situées l'une au-dessus de l'autre sur le bord exterieur. (*)

(*) Lorsqu'il y a deux épines, comme dans les trois premières divisions, l'une touche presqu'à l'extrémité de la jambe, et l'autre se trouve à quelque distance au-dessous; Mais lorqu'il y en a une seule comme dans les Scarites de la 4.e et de la 5.e division, au lieu de correspondre par sa position à l'une ou à l'autre des deux épines ci-dessus, elle occupe un point intermédiaire, c'est à dire, le milieu de l'espace terminé par les deux épines dans le premier cas.

1.re *Division*. Point d'aîles propres au vol; corps court; tronçon rétréci vers la base; élytres à bords dilatés.

2.e *Divis*. . . point d'aîles propres au vol; corps alongé; tronçon un peu rétréci vers la base; élytres à bords simples.

3.e *Divis*. . . des aîles propres au vol; corps alongé et linéaire; élytres à bords simples.

** Jambes intermédiaires à une seule épine.

4.e *Divis*. . . des aîles propres au vol; corps alongé et linéaire.

5.e *Divis*. . . point d'aîles propres au vol; corps alongé; tronçon rétréci par-devant.

Scarites de la première division.

1. *Scarites gygas*. Fab.

« *Sc. . . . ater, fronte levi (impressionibus dua-*
» *bus ordinariis tantum), thorace subquadrato trans-*
» *verso, tibiis anticis denticulis nullis, intermediis*
» *spina superiore breviore, elytris basi extus sub-*
» *striatis.*

Longueur 24 millim. Largeur 7 $\frac{1}{2}$.

Il est presque de moitié plus petit que le suivant, et en diffère par le devant de la tête qui manque de ces petites stries nombreuses qu'on voit sur l'autre, par le corselet à peine plus étroit postérieurement, par les jambes de devant qui ne sont point denticulées au-dessus des grandes dents

ordinaires, et par celles de milieu dont l'épine supérieure (du moins dans l'individu examiné) est plus courte que l'inférieure. Le corps paraît aussi plus étroit et plus convexe, et la mandibule gauche porte la troisième dent qui manque toujours dans les individus de l'espèce suivante de quelque sexe qu'ils soient.

Il habite en Afrique: du Museum d'histoire naturelle de Paris.

2. Scarites *Pyracmon*.

Scarites *Gygas* Rossi. Olivier, etc.

» *Sc. . . . ater nitidus, fronte striolata, thorace*
« *basi angustato, tibiis anticis denticulatis, inter-*
« *mediis spina superiore majore, elytris levissimis.*

Insecte assez connu, et commun sur les sables des côtes de la Méditerranée en France et en Italie. J'ai dû en réformer la phrase diagnostique pour faire ressortir les différences qui le distinguent du précédent, avec lequel il a toujours été confondu. Cette espèce ne se trouve point en Afrique, du moins d'après les renseignemens que je me suis procurés.

3. Scarites *Polyphemus* Ill.

« *Sc. . . . ater, elytris sulcatis, fulcis obsolete-*
» *punctatis, punctis discoidalibus* o–3.

Même forme et même taille de l'espèce précédente, dont elle ne diffère que par les sillons des élytres, et la présence d'une troisième dent à la mandibule gauche.

De Portugal, d'Égypte, et de Syrie. Cabinets de MM. Olivier, Brongniart, et Savigny.

SCARITES de la 2.e division.

4. *SCARITES quadratus.* Fab.

5. *SCARITES saxicola.*

« *Sc. . . . niger, capite utrinque unisulcato,*
» *levi, elytris punctulato-substriatis, tibiis inter-*
» *mediis spinis æqualibus, antennis extrorsum fer-*
» *rugineis.*

Un peu plus petit que le *Scarites sulcatus* et différent de lui, à qui il ressemble d'ailleurs beaucoup, par l'absence des aîles, et par les élytres à peine striées, et plus étroites antérieurement.

Longueur de la femelle 25-7 millim. Largeur 7-7 ½.

Collection de M.r Savigny qui l'a apporté de Syrie, où il se trouve sous les pierres.

SCARITES de la 3.e division.

6. *SCARITES sulcatus* Fabr. Oliv.

7. *SCARITES subterraneus* Fab.

8. *SCARITES subterreus* Norw.

« *Sc. . . . piceus nitidus, supra obscurior, fronte*
» *foveolisque levissimis, elytrorum striis profundis,*
» *levibus, antennis ferrugineis.*

Un peu plus court que le *Scarites subterraneus*, et plus clair, c'est-à-dire, de couleur marron, plus clair en dessous qu'en dessus. Le devant de la tête, marqué comme dans tous les autres de deux petits sillons, est tout-à-fait lisse et luisant.

Les antennes sont ferrugineuses et velues, excepté aux 4 premiers articles qui sont glabres. Les élytres ont des stries profondes et lisses, et portent chacune dans le troisième intervalle, deux points l'un vers le milieu, l'autre un peu avant l'extrémité. Long. de la femelle 18 millim. Largeur 5 $\frac{1}{2}$.

De l'Amérique Septentrionale ainsi que le précédent.

Collection de M. Peirolery, qui l'a reçu de M. Sturm sous le nom de *Scarites subterreus Norwich. N. Sp*, que j'ai conservé.

9. Scarites *glabratus*.

» *Sc . . . fronte utrinque striata, elytris levissi-*
» *mis puncto ante apicem impresso, tibiis anticis biden-*
» *ticulatis, intermediis spina superiore minuta.*

Port du *Scarites subterraneus*, et à peine plus grand que lui. Longueur de la femelle 22 millim. et demi, largeur 6. Les bords du chaperon sont un peu renflés et proéminens au-dessus de la base des antennes, celles-ci sont noires à la base, grises et velues à l'extrémité. Le corselet est convexe, lisse et luisant avec les côtés tout-à-fait droits; les élytres sont lisses, ou à peine montrent-elles les traces des stries en les

observant à la loupe. Leur surface ne présente qu'un seul point enfoncé situé vers l'extrémité de l'élytre. Le bord latéral est profondément canaliculé et ponctué; les jambes de devant ont trois dents dont la supérieure très-petite, et au-dessus de celles-ci deux autres plus petites. Les jambes de milieu sont comprimées et ciliées ainsi que les postérieures; mais elles portent de plus vers leur extrémité deux épines dont la supérieure très-petite. Les aîles sont complètes.

Cet insecte qui est tout-à-fait distinct du *Scarites laevigatus* Fab., se conserve au Musée d'histoire naturelle de Paris, et provient de la Collection Stathoudérienne. On croit qu'il est d'Amérique.

10. Scarites *politus*.

« *Sc. . . fronte foveolisque frontalibus levibus*,
» *thoracis canaliculo*, *elytrorumque striis punctis-*
» *que obliteratis*, *corpore subcylindrico atro*.

Assez semblable au *Scarites laevigatus* Fab. avec lequel il est facile de le confondre. Il en diffère néanmoins en ce qu'il est un peu plus grand; que son tronçon est plus carré; qu'il a deux aîles complètes; que le sillon du corselet est à peine apercevable, et que les stries et les points des élytres manquent absolument. Il a d'ailleurs deux épines bien distinctes aux jambes intermédiaires.

Du Musée d'histoire naturelle de Paris.

Patrie inconnue.

Scarites de la 4.e division. (*)

11. *Scarites indus* Fab. Oliv. pl. I. f. 2 *a. b.*

« *Sc. . . . fronte medio verticeque levissimis, ely-*
» *tris punctis impressis discoidalibus tribus (1.° baseos,*
» *2.° ad $\frac{3}{4}$, 3.° supra apicem), striis, thoracisque*
» *canaliculo punctulatis, corpore convexiusculo nigro.*

Des Indes. Muséum d'hist. nat. de Paris.

12. *Scarites orientalis.*

An verus Scarites indus?

« *Sc. . . fronte medio occipiteque levissimis, ely-*
» *tris punctis discoidalibus* 5, *striis thoracisque ca-*
» *naliculo levissimis, corpore convexiusculo, atro.*

Plus petit que le précédent, avec lequel il est aisé de le confondre. Port de notre *Scarites terricola.*

Longueur du mâle 14 millim. Largeur 4. La femelle a un demi-millimètre de plus en longueur et en largeur.

Le corselet est presque carré, avec la petite dent des angles postérieurs peu marquée, et la ligne enfoncée parallèle au bord antérieur très-courte. Les élytres un peu déprimées seulement vers la suture, sont profondément striées; les stries sont tout-à-fait lisses, exceptée la 3.e qui

(*) Tous les Scarites de cette division ont le front strié longitudinalement au moins sur les côtés entre les yeux.

porte 4 points enfoncés situés à-peu-près à égale distance les uns des autres, et un cinquième sur l'extrémité. Les jambes de devant ont la première des trois dents peu prononcée, et une ou deux autres petites au-dessus des grandes.

Des Indes orientales. Muséum d'histoire naturelle de Paris.

13. *Scarites planus.*

« *Sc. . . . fronte media levissima, occipite pun-*
» *ctato, elytris punctis discoidalibus* 5, *striis tho-*
» *racisque canaliculo punctatis, corpore depresso,*
» *atro, nitido.*

Voisin du *Scarites indus*; mais plus déprimé et plat, avec le sommet de la tête profondément pointillé de chaque côté, et 5 points bien distincts sur chaque élytre. Il diffère du suivant par le pointillement de la ligne du corselet, et des stries des élytres.

Longueur du mâle 16 millim. Largeur 4 $\frac{1}{4}$. Longueur de la femelle 17. Largeur 4 $\frac{2}{3}$.

Les palpes sont roussâtres; les antennes velues et rousses; le corselet très-large et lunulé, avec la ligne antérieure (celle qui est parallèle au bord antérieur) atteignant les bords latéraux. Des 5 points enfoncés des élytres le 1.er est placé au $\frac{1}{5}$ de la longueur; le 2.e aux $\frac{2}{5}$; le 3.e aux $\frac{3}{5}$; le 4.e aux $\frac{4}{5}$; le 6.e sur l'extrémité. Le 2.e, et même aussi le 3.e sont effacés dans quelques individus.

D'Égypte et de Syrie; communiqué par M. Savigny. Je dois un individu de cette espèce à M.r le Capitaine Bert.

14. *Scarites terricola.*

« *Sc. . . . fronte tota striolata, elytris punctis* » *duobus (altero ad $\frac{3}{4}$, altero supra apicem elytri)* » *impressis, striis utrinque crenulatis, thorace ca-* » *naliculo levi, corpore convexiusculo nigro.*

Cette espèce a les plus grands rapports avec le *Scarites subterraneus* Fab. (qui est d'Amérique), il paraît même que c'est celle-ci que Fabricius a eu en vue lorsqu'il a avancé que le *Scarites subterraneus* se trouvait aussi en Europe. Cependant en y regardant de près on trouve qu'elle en diffère par les jambes intermédiaires qui n'ont qu'une seule épine sur leur bord extérieur, par le front marqué de plusieurs petites stries longitudinales, par les stries qui portent sur les côtés, ou pour mieux dire, sur les bords des intervalles, de petites crénelures visibles à la loupe; enfin par la taille un peu moindre.

Elle a également beaucoup de rapports avec les *Scarites indus*, *planus*, et *arenarius*, et n'en diffère que par une taille un peu plus forte, par le sillon du corselet lisse, par les stries des élytres non pointillées, et par la 1.re et la 3.e dent de la mandibule gauche, qui sont doubles, quoique fort petites.

Longueur du mâle 19 millim. Largeur 5 $\frac{2}{3}$.

Le corselet est presque carré, et finement strié en travers sur le dos; le tronçon un peu plus étroit vers sa base; les élytres portent deux points enfoncés, dont le premier vers les $\frac{3}{4}$ de la longueur, et le second presqu'à l'extrémité; les jambes de devant ont 3 fortes dents, sur lesquelles une ou deux plus petites; 2 aîles complètes.

Je conserve à ce Scarite le nom que M.r Latreille avait provisoirement donné à l'individu de la Collection du Musée d'histoire naturelle de Paris.

Il habite les rivages sabloneux de la Méditerranée en Provence, et m'a été donné par Monsieur Bourgeois.

15. *Scarites arenarius.*

« *Sc. . . . fronte tota striolata, elytris punctis impressis posticis* 1-2, *thoracis canaliculo sub-crenato, elytrorum striis punctatis, corpore convexiusculo, atro, nitido.*

Un peu plus petit que le précédent, savoir, de la taille du *Scarites laevigatus* Fab. Longueur du mâle 18 $\frac{1}{2}$ millim. Largeur 5 $\frac{1}{3}$. La tête plus étroite que le corselet et le tronçon, porte une quantité de petites stries, sur tout le devant, et des mandibules assez longues, dont la droite a 2 grandes dents égales (la terminale non comptée), et la gauche 3 aiguës et simples, dont la 1.re, ensuite la 3.e sont les plus petites; le corselet est

transversal ; de forme presque carrée, et porte supérieurement des traces légères de stries transversales, qui, vues à la loupe, rendent le canalicule dorsal, comme crénelé; le tronçon est en carré long, et les élytres sont marquées de stries profondes et ponctuées. Vers les $\frac{3}{4}$ dans la 3.e strie on y voit un point enfoncé assez distinct, et souvent un deuxième tout près de l'extrémité; elles couvrent des aîles complètes.

On trouve ce Scarite en Italie sur les bords de la Méditerranée depuis Gênes jusqu'à Naples.

Il m'avait été d'abord communiqué par M. Spinola.

16. *Scarites mancus.*

« *Sc. . . fronte media occipiteque levibus, elytris*
» *punctis discoidalibus* 3, *quorum secundus ad* $\frac{3}{4}$
» *elytri, striis thoracisque canaliculo levissimis;*
» *corpore convexo, nigro, nitido.*

Il diffère peu du *Scarites orientalis* (n.° 12), et n'en est distingué que par le sillon transversal du bord antérieur du corselet, lequel touche à chaque côté, et se réunit avec le sillon des bords latéraux; par les élytres plus convexes, et par le défaut de deux points, celui-ci n'en ayant que trois, disposés dans la 3.e strie, le premier au quart de la longueur, le deuxième aux $\frac{3}{4}$, et le troisième un peu avant l'extrémité de l'élytre.

Longueur d'une femelle 15 millim. Largeur 4 $\frac{1}{4}$.

Les mandibules sont fournies de deux dents outre la terminale: La gauche a la première très-grande et formant continuation du bord intérieur de la base, et la deuxième excessivement petite; la droite a sa première grande obtuse et comme formée par la réunion de deux plus petites, et la seconde moins grande, mais aussi saillante, et un peu pointue (*). La tête est lisse, excepté sur les côtés près les yeux, où elle est marquée de plusieurs petites stries longitudinales. Les antennes sont noires, avec l'extrémité velue et grise, et le premier article ainsi que les palpes d'un roux foncé. Le corselet est presque carré, de la largeur du tronçon, arrondi postérieurement et avec la petite dent des angles postérieurs presque nulle; la strie transversale du bord antérieur se réunit avec les latérales, et celle du dos est tout-à-fait lisse.

Le tronçon est en carré long très-convexe. Les élytres à stries lisses sont marquées dans la 3.e de trois points enfoncés bien distincts dont le 1.r au quart de la longueur, le 2.e aux $\frac{3}{4}$, et le 3.e près l'extrémité; elles couvrent deux aîles complètes. Les

(*) N'ayant pas vu de mâles, je n'affirmerai pas que cette forme de mandibules soit commune aux deux sexes; ordinairement les mandibules des mâles ont une dent de plus, sur-tout la mandibule gauche.

pieds ainsi que tout le corps, sont d'un noir foncé et luisant, les jambes de devant ont leurs 3 dents petites, surtout la 1.re qui se distingue à peine d'une ou de deux autres plus petites dents qui la précèdent.

17. Scarites *gagates*.

» *Sc. . . fronte media occipiteque levibus, elytris* » *punctis discoidalibus* 3, *quorum secundum ad* $\frac{3}{5}$ » *elytri, striis thoracisque canaliculo levissimis, cor-* » *pore convexo, atro, nitido*.

Comme l'espèce précédente, mais d'un quart plus grand avec les stries plus profondes, et le 2.e point des élytres situé plus en avant, c'est-à-dire un peu après la moitié de leur longueur. Il a aussi beaucoup de rapport avec le *Scarites subterraneus*, et m'a même été envoyé pour tel, et comme venant de l'Amérique septentrionale par le D.r Klug; il en diffère cependant par le front strié sur les côtés, par les jambes intermédiaires à une seule épine, et celle-ci située plus haut, enfin par la position plus antérieure du 2.e point, qui dans le vrai *Sc. subterraneus* est situé aux $\frac{3}{4}$. de l'élytre. Longueur 19 $\frac{1}{2}$. millim. Largeur 5 $\frac{1}{2}$.

Scarites de la 5.e division

18. Scarites *levigatus* Fab. *Scarit. sabulosus* Oliv.
19. Scarites *Thelonensis*.

» *Sc. . . fronte utrinque striolata, ater, elytris*
» *punctato-striatis, punctisque duobus posticis dis-*
» *coidalibus impressis.*

Même port, même taille, et même couleur de l'espèce précédente, dont je la croirais volontiers une simple variété; en attendant que de nouvelles observations viennent détruire mes doutes, je présente celle-ci comme espèce distincte, vu le caractère des stries des élytres bien visibles à oeil nu, tandis qu'elles ne le sont qu'à la loupe dans le *Scarites levigatus.* Je regarderais mon espèce comme le *Scarites sabulosus* d'Olivier, si Latreille et d'autres entomologistes ne s'accordaient pas à donner ce *Scarites sabulosus* comme synonyme du *Scarites levigatus* F.

Le second point enfoncé de chaque élytre occupe de même que dans le *Sc. levigatus*, la 2.e strie, et se trouve tout près de l'extrémité. Longueur du mâle 16 millim. Larg. 5.

Envoyé de Toulon par M. Banon professeur à l'école de médecine de la même ville.

G. PASIMACHUS.

Caractère essentiel du genre.

» Mâchoires droites, obtuses et sans crochet à l'extré-
» mité.

» Langue arrondie à son sommet, et proéminente au-
» delà de l'évasement des paraglosses, terminée par
» deux soies

» Palpes filiformes.

Ces Insectes que l'on a jusqu'ici confondus avec les Scarites proprement dits, sont avec ceux du genre suivant les seuls Coléoptères à 6 palpes, dont les mâchoires soient réellement droites et obtuses, c'est-à-dire dépourvues de ce petit crochet qui termine les mâchoires des autres Carabiques, sans en excepter celles des Scarites proprement dits.

Leur corselet diffère aussi de celui des autres genres de cette sous-famille, en ce qu'il est largement échancré à son sommet où la tête est reçue entre deux fortes dents ou saillies des bords latéraux, et qu'à sa base, il se prolonge de chaque côté en un angle droit, laissant au milieu une échancrure, par laquelle seule le pétiole reste visible.

Leur langue ressemble pour la forme à celle des Scarites ordinaires; mais elle est plus saillante, et dépasse l'évasement de la membrane postérieure, laquelle étant seule visible dans les Scarites à cause de la brieveté de la langue elle-même, a fait dire que leur langue était échancrée ou évasée, tandis qu'elle est réellement obtuse ou même arrondie.

Les palpes sont filiformes comme ceux des Scarites.

Les lèvres ressemblent aussi à celles des Scarites, et les antennes qui sont filiformes et de la longueur du corselet au plus, ont leur premier article plus court, que les trois suivans pris ensemble, à peine plus long que les 2 suivans.

Les mandibules fortement arquées sont armées d'une ou de deux grandes dents obtuses différemment disposées, ou prononcées suivant l'espèce et le sexe de l'individu.

Le corps est très-large et court, et les élytres ont un grand rebord marginal. Les jambes intermédiaires manquent de ces épines qui se trouvent sur le bord extérieur avant l'extrémité dans les Scarites.

Tous les insectes qui se rapportent à ce genre sont d'Amérique, il paraît qu'il y en a deux espèces, et peut-être trois.

1. *Pasimachvs depressus.*

Scarites depressus Fab. Oliv. Paliss. I. pl. xv. f. 3.

2. *Pasimachvs marginatus.*

Scarites marginatus Fab. Oliv. Paliss. l. c. f. 1-2.

Nota. Le *Scarite presque-lisse* figuré par Palissot dans la 7.e livraison de ses *Insectes recueillis en Afrique* etc. pl. xv. fig. 4, ne me paraît, quoique plus petit, que la femelle du Scarite marginé re-

présenté fig. 1-2 de la même planche, ou tout au plus une variété de cette même femelle; je crois avoir observé que dans ce genre les femelles ont, entre autres caractères, les jambes plus courtes et comprimées, ainsi qu'on le voit dans la figure citée du Scarite presque-lisse.

G. Carenvm.

Caractère essentiel du genre.

» Mâchoires droites, obtuses, sans crochet terminal.

» Langue arrondie à son sommet et prolongée à peine
» au-delà de l'évasement des paraglosses, terminée
» par deux soies.

» Palpes max. extér. à dernier article renflé, et une
» fois plus long que le précédent; les labiaux à der-
» nier article grand et triangulaire.

Le *Scarites cyaneus* Fab. Oliv. est le type et à la fois la seule espèce que je connais appartenant à ce nouveau genre.

Les lèvres, les mâchoires et la langue sont les mêmes que dans le genre précédent; les mandibules sont dentées comme dans les Scarites, la droite porte trois dents obtuses outre la terminale, et la gauche deux qui vont se loger dans les intervalles de celles de la droite.

Les palpes diffèrent tout-à-fait de ceux des autres genres de la sous-famille, en ce qu'ils sont très-courts; que les maxillaires extérieurs ont le dernier article plus gros et deux fois aussi long que le précédent, tronqué au sommet, et cylindrique; que les labiaux très-gros et courts ont l'avant dernier article à peine plus long que le dernier, qui est grand et triangulaire, c'est-à-dire dilaté et tronqué à son sommet.

Les antennes sont courtes, moniliformes, et à premier article à peine plus long que le deuxième.

Les jambes de devant n'ont que deux digitations à leur bord externe.

Le corselet est très-bombé, et parfaitement arrondi postérieurement. Le tronçon, de forme ovale, et bombée, est également arrondi sur les angles antérieurs, et à son extremité. Dans la seule espèce connue les élytres ne recouvrent point d'aîles, et sont soudées ensemble.

J'ai tiré la description du genre et de l'espèce d'un individu conservé au Musée d'histoire naturelle de Paris.

1. *Carenum cyaneum. Scarites cyaneus.* Fab. Oliv.

G. Clivina. Latreille.

Je divise ce genre ainsi que l'a fait Latreille, en deux sections; à la première appartiennent les

Clivines à corselet carré, à la seconde celles à corselet globuleux.

Clivines de la première section.

1. *Clivina arenaria* Latr. *Scarites aren.* Fab.

2. *Clivina lobata.*

» *Cl. . . . thorace quadrato, picea, elytris pun-*
» *ctato-striatis, punctisque quatuor discoidalibus im-*
» *pressis, femoribus anticis subtus dilatato-bilobis.*

Taille, port et couleurs de la *Clivina arenaria*, dont celle-ci ne diffère que par les cuisses antérieures qui sont très-renflées et dilatées en dessous en deux lobes distincts. Les points des élytres occupent la troisième strie.

Cette espèce est du Bengale, et m'a été envoyée par M.r Schüppel de Berlin.

3. *Clivina picipes.*

» *Cl. . . thorace quadrato, atra, nitida, pedibus*
» *piceis, antennis griseis, elytris punctato-striatis.*

Assez semblable à la *Clivina arenaria*, mais deux ou trois fois plus grande, et toute noire luisante, à l'exception des antennes qui sont grises, et des pieds qui sont couleur de poix. Longueur 9 millim. Largeur 2 $\frac{1}{4}$.

Patrie inconnue. Du Cabinet de M. Boissier où elle portait le nom de *Clivina picipes* Meg.

Obs. L'insecte figuré par Palissot pl. XV fig. 6, et décrit sous le nom de *Scarites 4-maculatus* dans la 7.e livraison pag. 107, appartiendrait à cette section des Clivines, s'il était réellement un Carabique; mais, à moins qu'il ait été mal dessiné, il me paraît plutôt appartenir à la famille des Colydies, car sa tête tronquée et couvrant entièrement les organes manducatoires, présente un caractère tout-à-fait étranger aux Coléoptères carnassiers.

CLIVINES de la 2e section.

4. *CLIVINA gibba* Lat. Clairv.
5. *CLIVINA thoracica* Lat.
6. *CLIVINA arctica. Scarites* Payk. fn. sv.
7. *CLIVINA bi-maculata.*

» *Cl. . . thorace globoso, viridi-aenea, antennis,*
» *pedibusque rufis, elytris intus striatis, ante apicem*
» *macula magna obliqua discoidali flavescente.*

Taille de la *Clivina gibba*, mais d'une forme un peu plus alongée. Noire en dessous, d'un vert bronzé et métallique en dessus, avec la bouche, les antennes et les pattes fauves, et une tache oblique vers les $\frac{2}{3}$ des élytres, de couleur jaune. Cette tache commence au bord extérieur un peu au-delà de la moitié de l'élytre, et s'etend obliquement en arrière vers la suture, sans cependant y arriver. Les élytres sont lisses, excepté vers la suture où

elles portent deux stries pointillées lesquelles ne commencent même qu'un peu au-delà de la base, et n'atteignent postérieurement que les deux tiers.

Longueur 3 millim. Largeur $\frac{4}{5}$.

Cette espèce habite le long du Rhône, sur le rivage, et m'a été donnée par M. Bourgeois de Lyon.

Obs. Le *Scarites 2-pustulatus* Fab. paraît se rapprocher de cette Clivine, et en différer seulement par sa taille 5 à 6 fois plus grande, et par sa couleur toute noire.

J'ai vu dans la collect. de M. Peiroleri une Clivine de l'*Amérique septentrionale* envoyée par M. Sturm sous le nom de *Scarites 2-pustulatus*; mais elle était verte, et ne portait qu'un très-petit point jaune sur chaque élytre, ce qui m'a empêché de la regarder comme le vrai *Scarites 2-postulatus* Fab. Elle ne m'a point paru d'ailleurs assez différer de la *Clivina arctica* pour en être séparée, malgré la différence de patrie.

8. CLIVINA *dyschiria*.

» *Cl. . . thorace globoso, nigra, tibiis rufis, anticis*
» *extus sub-palmatis, elytris punctato-striatis apice*
» *levibus.*

Elle ressemble, pour la forme du corps et la taille, à la *Clivina thoracica*, et pourrait être prise pour une variété noire de la même, si elle n'avait pas dans ses jambes antérieures un caractère qui la

distingue de celle-ci et de la *Cl. gibba* dont elle est aussi deux fois plus grande.

Les jambes de devant se terminent à l'extérieur par une dent plus petite que dans les autres espèces analogues, et au-dessus de laquelle on aperçoit deux autres dents encore plus petites, dont la première même est fort-peu apparente.

Les élytres sont marquées de stries ponctuées, excepté au bout où elles s'effacent entièrement. Longueur 4 millim. et $\frac{2}{3}$. Largeur 1 $\frac{1}{2}$.

J'ai trouvé cette espèce en hiver sur une côte exposée au soleil, aux environs de Turin.

9. CLIVINA *tranquebarica*.

» *Cl. . . thorace transverso sub-globoso, nigra,*
» *pedibus rufis, elytris totis punctato-striatis.*

Un peu plus grande que les dernières espèces, et distincte de toutes celles du genre par son corselet beaucoup plus large que long, et moins globuleux que dans les autres. Longueur 5 mill. $\frac{1}{4}$. Larg. 1 $\frac{2}{3}$.

De Tranquebar. Envoyée par M. Schüppel.

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT D'UNE LIGNE D'AIR

ET SUR

LE MOUVEMENT DES ONDES

DANS LE CAS OÙ LES VÎTESSES DES MOLÉCULES NE SONT PAS SUPPOSÉES TRÈS-PETITES.

PAR M.r PLANA.

Lu dans la Séance du 11 Juin 1813.

1. MONSIEUR POISSON, dans son beau Mémoire sur la théorie du Son (*Voyez le Tome VII du Journal de l'École polythecnique*) parvient à déterminer la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans une fibre sonore, par une méthode nouvelle qui lui est propre, et d'autant plus digne de remarque que l'équation aux différences partielles du second ordre qui renferme la solution générale du probléme se trouve satisfaite, d'une manière singulière, par le systéme de

deux équations entre les variables principales et les coëfficiens différentiels du premier ordre, renfermant une fonction arbitraire. Quelques difficultés que j'ai rencontrées pour saisir l'esprit de cette méthode, m'ont fait penser qu'en adoptant la première idée de l'Auteur, l'on pourrait parvenir à son résultat par un procédé plus direct et susceptible d'être étendu à d'autres équations du même ordre. Et il y a cela de remarquable dans mon analyse que rien ne m'y oblige à supposer la vîtesse des molécules en mouvement plus petite que la vîtesse de propagation du Son.

La théorie du mouvement des ondes formées à la surface d'une eau stagnante par l'agitation d'un corps lancé dans le fluide ou par toute autre cause, dépend, comme l'on sait, de l'intégration d'une équation aux différences partielles entre quatre variables. Cette équation se réduit à trois variables, si l'on suppose que, pendant le mouvement, les molécules fluides ne sortent pas du plan vertical où elles sont placées dans l'état d'équilibre.

Par suite de cette réduction dans le nombre des variables, il arrive que l'équation de ce mouvement se trouve comprise dans celles que je suis parvenu à intégrer par le systême de deux équations entre les coëfficiens différentiels, renfermant une fonction arbitraire.

L'on trouve d'après cela l'expression des élévations et des abaissemens successifs des molécules fluides, ainsi que l'expression de leur vîtesse. Cette dernière, par

une considération fort simple, met en évidence la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans la masse fluide, et il en résulte que, quelle que soit la nature de l'ébranlement primitif, la vîtesse de propagation des ondes est uniforme, et égale à celle qu'un corps grave aquerrait en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur du liquide, comptée depuis sa surface jusqu'au fond supposé horizontal. Jusqu'ici la théorie suppose la profondeur du fluide très-petite et le fond du bassin qui contient l'eau horizontal.

Mais si l'on remarque que dans la production de ce mouvement, les molécules fluides ne doivent être ébranlées qu'à une profondeur très-petite, et par tout la même, (du moins à une distance un peu grande de l'origine du mouvement) l'on pourra admettre sans invraisemblance que le cas particulier que la théorie parvient à résoudre est applicable à toute eau stagnante, et même aux grandes ondes de l'Océan, ce qui est d'ailleurs confirmé par l'expérience. La vîtesse des ondes peut donc être considerée comme à-peu-près constante, ce qui est analogue à ce qui se passe dans la propagation du Son. Ce théorême, auquel l'immortel Lagrange est parvenu le premier par une méthode rigoureuse, en supposant très-petite la vîtesse des molécules en mouvement, se trouve donc démontré quelle que soit la grandeur de cette vîtesse.

2. Commençons par nous occuper de l'équation qui renferme la théorie du mouvement d'une ligne d'air.

D'après le Mémoire cité de M.[r] Poisson (page 364), nous aurons l'équation,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{2d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dxdt}+\frac{d\varphi^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{a^2d^2\varphi}{dx^2}\;\ldots\;(\alpha)$$

Faisons pour plus de simplicité,

$$p=\frac{d\varphi}{dx}\,;\; q=\frac{d\varphi}{dt}\,;$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{dq}{dt}+2p\cdot\frac{dp}{dt}+(p^2-a^2)\cdot\frac{dp}{dx}=0\;\ldots\;(\beta)$$

Maintenant, si l'on pose

$$Q=q+\alpha p+\beta p^2,$$

α et β désignant deux coëfficiens constans indéterminés, l'on obtient, en différentiant successivement par rapport à t et à x,

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dq}{dt}+(\alpha+2\beta p)\cdot\frac{dp}{dt};$$

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{dp}{dt}+(\alpha+2\beta p)\cdot\frac{dp}{dx};$$

partant l'on aura,

$$\frac{dQ}{dt}+(p-\alpha)\cdot\frac{dQ}{dx}=\frac{dq}{dt}+2p.\frac{dp}{dt}+(p^2-\alpha^2)\frac{dp}{dx},$$

en prenant $2\beta=1$.

Le second membre de cette équation devient identique avec le premier de l'équation (β) en faisant $\alpha=\pm a$: Donc, si l'on pose

$$k = q - ap + \tfrac{1}{2}p^2\,;$$

$$k' = q + ap + \tfrac{1}{2}p^2\,;$$

l'équation (β) se trouvera transformée dans l'une ou l'autre des deux suivantes :

$$\frac{dk}{dt} + (p+a)\frac{dk}{dx} = 0, \; \ldots\ldots \; (\mathrm{I})$$

$$\frac{dk'}{dt} + (p-a)\,.\,\frac{dk'}{dx} = 0, \; \ldots\ldots \; (\mathrm{II}).$$

Considérons d'abord l'équation (I). Puisque p et k sont censées fonctions des variables x et t, il est évident que l'on peut regarder p comme étant fonction des variables k, t. Soit donc

$$p = \Psi\,(k,\,t)\,,$$

l'équation (I) deviendra

$$\frac{dk}{dt} + (a + \Psi(k,\,t))\,.\,\frac{dk}{dx} = 0.$$

Il est fort aisé d'intégrer cette équation, et l'on trouve (*Voyez le Calcul intégral de* LACROIX, *Tome II, page* 484).

$$k = f.\left(x - at - \int \Psi\,(k,t)\,dt\right) \; \ldots\ldots \; (\gamma)$$

en ayant soin d'exécuter l'intégration indiquée comme si la quantité k était constante. Cette équation fera connaître la fonction de x, t que l'on doit prendre pour k; ensuite l'on formera les valeurs de p et de q, à l'aide

des équations

$$\left.\begin{array}{l} p=\Psi(k,t), \\ q=k+ap-\frac{1}{2}p^2 \end{array}\right\} \ldots (\delta).$$

Cela posé, l'on obtiendrait la fonction désignée par φ, en intégrant l'équation

$$d\varphi=pdx+qdt.$$

Mais, pour qu'un tel procédé soit légitime, l'on sait que les valeurs de p et de q doivent rendre identique l'équation

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dx};$$

ainsi il est nécessaire de chercher quelle forme doit avoir la fonction $\Psi(k,t)$ pour que cette condition soit remplie.

A cet effet, différencions p et q, en y considérant k comme fonction de x, t; nous aurons

$$\frac{dp}{dt}=\left(\frac{dp}{dt}\right)+\left(\frac{dp}{dk}\right).\frac{dk}{dt};$$

$$\frac{dq}{dx}=\frac{dk}{dx}+a\left(\frac{dp}{dk}\right).\frac{dk}{dx}.-p.\left(\frac{dp}{dk}\right).\frac{dk}{dx}.$$

Égalant les seconds membres de ces deux équations, et éliminant $\frac{dk}{dt}$ à l'aide de l'équation (I), l'on trouve

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{dk}{dx}.\left\{1+2a\left(\frac{dp}{dk}\right)\right\}.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, quelle que

soit la valeur de k donnée par l'équation (γ), il est aisé de voir qu'il suffit de poser

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0; \quad 1 + 2a\left(\frac{dp}{dk}\right) = 0;$$

d'où l'on conclut que l'on doit prendre

$$p = -\frac{1}{2a} k.$$

Puisque la valeur de p, exprimée par la variable k, se trouve indépendante de t, nous aurons en vertu de l'équation (γ);

$$k = f_{,}.\left\{x - at + \frac{1}{2a}.\mathrm{K}t\right\},$$

ou bien

$$k = f_{,}.\left\{x - at - \frac{d\varphi}{dx}.t\right\}.$$

Substituant dans la valeur de $q_{,}$ donnée par la seconde des équations (δ), à la place de k sa valeur $-2ap$, l'on obtient

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a\frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{2}.\frac{d\varphi^2}{dx^2};$$

et en comprenant sous la fonction arbitraire le facteur $-\frac{1}{2a}$ l'on aura, pour déterminer $\frac{d\varphi}{dx}$, l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} = f.\left\{x - at - \frac{d\varphi}{dx}.t\right\}.$$

Il suit de là que le système de ces deux dernières équations satisfait à la proposée (α), et à la condition

nécessaire pour déterminer φ en intégrant l'équation

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} . dx + \frac{d\varphi'}{dy} . dy.$$

En traitant l'équation (II) comme nous venons de traiter l'équation (I), l'on trouverait que l'équation (α) est également satisfaite par le systéme des deux équations

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{F} . \left\{ x + at - \frac{d\varphi}{dx} . t \right\},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi^2}{dx^2};$$

où la fonction F est aussi arbitraire.

Telles sont les deux solutions singulières de l'équation (α), auxquelles M.r Poisson est parvenu le premier dans le Mémoire cité.

Il est aisé de conclure de ces équations la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans la fibre sonore, et il en résultera que, quelle que soit la nature de l'ébranlement primitif, la vîtesse du Son sera constante et égale à a.

3. Cette manière de satisfaire à une équation aux différences partielles du second ordre n'est pas particulière à l'équation (α); elle peut être appliquée avec succès à toute équation, du même ordre, susceptible d'être mise sous la forme

$$\frac{dk}{dt} + \mathrm{P} . \frac{dk}{dx} = \mathrm{T}, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{A})$$

P et T indiquant des fonctions, l'une du coëfficient différentiel p, et l'autre de la variable t; et k désignant une fonction de q et p de la forme

$$k = q + \mathrm{F}(p).$$

En effet, considérons p comme une fonction de k et de t que nous exprimerons par $p = \Psi(k, t)$. L'on pourra d'après cela regarder P comme une fonction des mêmes variables représentée par $\mathrm{P} = \Psi_{,}(k, t)$. Par ce moyen l'équation (A) devient intégrable, et l'on obtient par les méthodes connues:

$$k - \int \mathrm{T}dt = f_{,}\left\{\alpha - \int \Psi_{,}(\alpha + \int \mathrm{T}dt, t)\, dt\right\}$$

en ayant soin de substituer $k - \int \mathrm{T}dt$ à la place de α, après l'intégration. Connaissant ainsi la fonction de x, t que l'on doit prendre pour k, voyons quelle doit être la forme de la fonction Ψ, pour que les valeurs de p et de q données par les équations

$$p = \Psi(k, t); \quad q = k - \mathrm{F}(p)$$

satisfassent à la condition d'intégrabilité.

Différenciant la première de ces équations par rapport à t, et la seconde par rapport à x, nous aurons

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}\right) + \left(\frac{dp}{dk}\right) \cdot \frac{dk}{dt},$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dk}{dx} - \mathrm{F}'(p) \cdot \left(\frac{dp}{dk}\right) \cdot \frac{dk}{dx}.$$

En égalant les seconds membres de ces deux équations, et substituant à la place de $\frac{dk}{dt}$ sa valeur déduite de l'équation (A) l'on obtient,

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)+\mathrm{T}\left(\frac{dp}{dk}\right)=\frac{dk}{dx}\cdot\left\{1+\mathrm{P}\cdot\left(\frac{dp}{dk}\right)-\mathrm{F}'(p)\cdot\left(\frac{dp}{dk}\right)\right\}.$$

Pour que cette équation soit satisfaite quelle que soit la forme de la fonction f, il faudra que l'on ait,

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)+\mathrm{T}\left(\frac{dp}{dk}\right)=0,$$

$$1+\left(\frac{dp}{dk}\right)\left\{\mathrm{P}-\mathrm{F}'(p)\right\}=0.$$

La première de ces équations devient identique en prenant

$$p=\Psi.\left(k-\int\mathrm{T}dt\right)$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dp}{dk}\right)=\frac{dp}{dk-\mathrm{T}dt};$$

partant la seconde équation nous donnera

$$k-\int\mathrm{T}dt=\mathrm{F}(p)-\int\mathrm{P}dp.$$

Il suit de là que l'on a

$$q=\int\mathrm{T}dt-\int\mathrm{P}dp.$$

Et comme la fonction désignée par Ψ doit, d'après la valeur précédente de p, se réduire à une fonction de α seulement, l'on aura,

Rrr

$$k - \int \mathrm{T}\,dt = f_{,}.\left\{x - \Psi_{,}(\alpha).t\right\},$$

ou bien,

$$k - \int \mathrm{T}\,dt = f_{,}.\left\{x - \mathrm{P}.t\right\},$$

ce qui change la valeur de p en

$$p = f.\left(x - \mathrm{P}.t\right).$$

Le systéme des deux équations qui satisfait à la proposée (A) est donc,

$$\frac{d\varphi}{dx} = f.\left(x - \mathrm{P}.t\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int \mathrm{T}\,dt - \int \mathrm{P}\,dp.$$

Ces deux équations fourniront toujours pour $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ des valeurs telles qui permettront de déterminer φ, en intégrant l'équation

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}.dx + \frac{d\varphi}{dt}.dt.$$

4. Maintenant je vais faire voir que l'équation

$$\frac{dq}{dt} + \mathrm{R}.\frac{dp}{dt} + \mathrm{S}.\frac{dp}{dx} = \mathrm{T} \ldots\ldots (\mathrm{A}')$$

dans laquelle R, S expriment des fonctions quelconques de p; et T une fonction de t, peut toujours être ramenée à la forme de l'équation (A). En effet,

faisons

$$P = \frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 - S},$$

$$\frac{d.F(p)}{dp} = \frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 - S}.$$

Cela posé, il est clair qu'en prenant

$$k = q + F(p),$$

l'on pourra transformer l'équation (A') dans la suivante

$$\frac{dk}{dt} + P.\frac{dk}{dx} = T \ldots\ldots (b)$$

dont la forme est exactement la même que celle de l'équation (A).

En prenant,

$$P' = \frac{1}{2}R - \sqrt{\frac{1}{4}R^2 - S},$$

$$\frac{d.F_{,}(p)}{dp} = \frac{1}{2}R + \sqrt{\frac{1}{4}R^2 - S};$$

$$k' = q + F_{,}(p),$$

l'on aurait

$$\frac{dk'}{at} + P'\frac{dk'}{dx} = T \ldots\ldots (b')$$

pour la transformée de l'équation (A').

En intégrant les équations (b) et (b') par la méthode précédente l'on obtiendra, pour satisfaire à

la proposée, deux systémes d'équations renfermant chacun une fonction arbitraire.

5. L'on peut encore intégrer par cette méthode une équation de la forme

$$\frac{dq}{dt}+(\mathrm{R}+\mathrm{Q})\frac{dp}{dt}+(\mathrm{S}+\mathrm{Q}').\frac{dp}{dx}=\mathrm{T}\ldots(\mathrm{A}'')$$

dans laquelle nous supposons T fonction de la variable t; R et S fonctions du coëfficient différentiel p seulement, et Q, Q' fonctions de p, q.

Conservant à P, k, F(p) les dénominations posées dans le N.° 4, l'équation (A″) pourra être transformée dans la suivante

$$\frac{dk}{dt}+\mathrm{P}.\frac{dk}{dx}+\mathrm{Q}.\frac{dp}{dt}+\mathrm{Q}'.\frac{dp}{dx}=\mathrm{T}.$$

Mais nous avons $q=k-\mathrm{F}(p)$; donc l'on pourra regarder Q et Q' comme des fonctions de k et p sans q. Maintenant, si l'on pose

$$p=\Psi.\left(k-\int \mathrm{T}dt\right),$$

il viendra

$$\frac{dp}{dx}=\left(\frac{dp}{dk}\right).\frac{dk}{dx};\ \frac{dp}{dt}=\left(\frac{dp}{dk}\right).\left(\frac{dk}{dt}-\mathrm{T}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente l'on trouve

$$\frac{dk}{dt}.\left\{1+\mathrm{Q}.\left(\frac{dp}{dk}\right)\right\}+\frac{dk}{dx}.\left\{\mathrm{P}+\mathrm{Q}'\left(\frac{dp}{dk}\right)\right\}$$
$$=\mathrm{T}+\mathrm{Q}\,\mathrm{T}.\left(\frac{dp}{dk}\right),$$

ou bien

$$\frac{dk}{dt} + \text{M} \cdot \frac{dk}{dx} = \text{T}, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{I})$$

en faisant, pour plus de simplicité,

$$\text{M} = \frac{\text{P} + \text{Q}' \left(\frac{dp}{dk}\right)}{\text{I} + \text{Q} \left(\frac{dp}{dk}\right)} \cdot$$

Cette valeur de M peut être considérée comme une fonction de $k - \int \text{T}\, d\, t$; ainsi l'on pourra intégrer l'équation (I), comme nous avons intégré l'équation (A) dans le N.° 3, ce qui donnera

$$k - \int \text{T} dt = f_{,} \cdot (x - \text{M} \cdot t),$$

où le caractéristique $f_{,}$ indique une fonction arbitraire.

Cela posé, déterminons la forme que doit avoir la fonction Ψ, pour que les valeurs de p et de q remplissent les conditions d'intégrabilité.

L'équation $q = k - \text{F}(p)$ donne,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dk}{dx} - \text{F}'(p) \cdot \left(\frac{dp}{dk}\right) \cdot \frac{dk}{dx};$$

égalant cette valeur à celle de $\frac{dp}{dt}$, et éliminant $\frac{dk}{dt}$, à l'aide de l'équation (I), l'on obtient,

$$\frac{dk}{dx} \cdot \left\{ \text{I} + \left(\text{M} - \text{F}'(p) \right) \left(\frac{dp}{dk}\right) \right\} = \text{o} \, .$$

Il suit de là, que pour rendre cette équation iden-

tique, quelle que soit la forme de la fonction $f_{,}$, il faudra que l'on ait,

$$1 - F'(p) \cdot \left(\frac{dp}{dk}\right) + M \cdot \left(\frac{dp}{dk}\right) = 0 .$$

Substituant à la place de M sa valeur, cette équation deviendra,

$$0 = 1 + \left(\frac{dp}{dk}\right)\left\{P + Q - F'(p)\right\}$$
$$+ \left(\frac{dp}{dk}\right)^2\left\{Q' - QF'(p)\right\} \ldots (2)$$

laquelle est, comme l'on voit, entre deux variables seulement, puisque nous avons supposé faite l'élimination de q dans les expressions de Q et Q'. Ici il est nécessaire de se rappeller que l'on a

$$\left(\frac{dp}{dk}\right) = \frac{dp}{dk - T\,dt},$$

et qu'en conséquence l'intégrale de l'équation (2) donne

$$k - \int T dt = \varphi \cdot (p) .$$

Mais nous avons $q = k - F(p)$; donc l'on aura

$$q = \int T dt + \varphi(p) - F(p) \quad \ldots\ldots (I).$$

Nommons M' ce que devient la valeur de M après la substitution de la valeur de $\left(\frac{dp}{dk}\right)$ tirée de l'équation (2); nous aurons

$$k - \int T dt = f_{,} \cdot (x - M' \cdot t);$$

partant

$$p = f.(x - M'.t) \quad \ldots\ldots \quad (II).$$

Il suit de là que pour satisfaire à l'équation (A'') il faudra employer les valeurs de p et de q données par le systéme des deux équations (I) et (II), dans lesquelles la fonction f. est arbitraire, et les deux autres φ et F sont déterminées, la première par l'équation (2), et la seconde par l'équation

$$F(p) = \int \left(\frac{1}{2} R - \sqrt{\frac{1}{4} R^2 - S} \right) dp.$$

Il est inutile d'observer que l'équation (2) étant du second degré par rapport à $\left(\frac{dp}{dk}\right)$ donnera en général deux valeurs de $k - \int T dt$ en fonction de p; et qu'en conséquence l'on pourra toujours former deux systémes d'équations semblables au précédent pour satisfaire à la proposée.

Il est aisé de voir que cette méthode s'applique à toute équation comprise dans la forme

$$\frac{dq}{dt} + R \frac{dp}{dt} + S . \frac{dp}{dx} = T, \quad \ldots\ldots \quad (A''')$$

T désignant une fonction de la variable t, et R, S des fonctions quelconques des coëfficiens différentiels p et q. Car l'on pourra dans tous les cas décomposer R ainsi que S en deux parties dont une soit indépendante de q.

6. Pour donner une application intéressante de ce procédé d'intégration, je vais maintenant chercher la loi de propagation du mouvement dans les ondes formées par les élévations et les abaissemens successifs d'une eau stagnante contenue dans un bassin peu profond et ayant son fond horizontal.

Je suppose que les molécules fluides, pendant le mouvement, ne sortent pas du plan vertical où elles sont placées dans l'état d'équilibre. Dans cette hypothèse, toute la théorie de ce mouvement est renfermée dans l'équation

$$\frac{d\tau'}{dt}+\frac{d.(\tau-g\alpha)\frac{d\varphi'}{dx}}{dx}=0,$$

où g exprime la force accélératrice de la gravité, α la profondeur du bassin, qui contient le fluide, et

$$\tau'=\frac{d\varphi'}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2$$

(Voyez la Mécanique analytique, page 489.)

Comme nous supposons α constant, faisons $g\alpha=a^2$, et substituons dans l'équation précédente à la place de τ' sa valeur ; nous aurons en posant,

$$p=\frac{d\varphi'}{dx};\quad q=\frac{d\varphi'}{dt},$$

$$\frac{dq}{dt}+2p\frac{dp}{dt}+\left(q+\tfrac{3}{2}p^2-a^2\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

Comparant cette équation avec l'équation (A″) l'on aura

$$R=2p;\quad S=\tfrac{3}{2}p^2-a^2;\quad Q=0;\quad Q'=q;\quad T=0.$$

Les formules posées dans les N.os 4 et 5 donnent dans le cas actuel

$$P=p+\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2};$$

$$M=p+q\left(\frac{dp}{dk}\right)+\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2};$$

$$F'(p)=p-\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2}.$$

L'équation (2) devient ici,

$$1+2\left(\frac{dp}{dk}\right)\cdot\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2}+q\left(\frac{dp}{dk}\right)^2=0,\ \ldots\ldots (c)$$

d'où l'on conclut

$$q\cdot\left(\frac{dp}{dk}\right)=-\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2}+\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2-q}.$$

Substituant cette valeur dans celle de M, l'on obtiendra

$$M'=p+\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2-q}.$$

Soit $k=\varphi(p)$ la valeur de k qui satisfait à l'équation (c), l'on aura d'après les équations (I) et (II),

$$q=\varphi(p)-\tfrac{1}{2}p^2+\int dp\cdot\sqrt{a^2-\tfrac{1}{2}p^2}\ldots\ldots(m)$$

$$p = f . \left\{ x - a t \sqrt{1 - \frac{p}{2a^2} - \frac{q}{a^2}} - pt \right\} \ldots \ldots (n);$$

Toutes les valeurs de p et de q que l'on déduira de ces équations seront telles que l'on pourra déterminer la fonction φ', en intégrant l'équation

$$d\varphi' = \frac{d\varphi'}{dx} . dx + \frac{d\varphi'}{dt} . dt .$$

Au reste, il sera inutile de faire cette intégration toutes les fois que l'on voudra se contenter de connaître la vîtesse des molécules en mouvement, ainsi que les élévations et abaissemens successifs du fluide. Car, en désignant par z les élévations du fluide l'on a,

$$z = \frac{1}{g} . \frac{d\varphi'}{dt} + \frac{1}{2g} \left(\frac{d\varphi'}{dx} \right)^2$$

et l'expression de la vîtesse des molécules est $\frac{d\varphi'}{dx}$.

7. Il est facile de conclure de l'équation (n) la loi suivant laquelle le mouvement se propage dans le sens des abscisses positives. A l'origine du mouvement l'on a $t = 0$, et par conséquent $p = f . x$. Donc, si l'on suppose que les molécules fluides primitivement ébranlées sont comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \beta$, il faudra que la valeur de fx soit nulle pour toute valeur de x qui surpasse β. Une molécule fluide placée à une distance $x > \beta$ commencera donc à s'ébranler à l'instant où l'on aura

$$x - a t \sqrt{1 - \frac{p^2}{2a^2} - \frac{q}{a^2}} - pt = \beta .$$

et cessera de se mouvoir à l'instant où l'on aura

$$x - at.\sqrt{1 - \frac{p^2}{2a^2} - \frac{q}{a^2}} - pt = 0.$$

Or, l'on comprend aisément que la vîtesse naissante p, ainsi que l'élévation naissante z doivent être des quantités très-petites relativement à la quantité désignée par a: Donc, si l'on suppose en même tems très-petit le rayon β de l'ébranlement primitif, l'on aura simplement

$$x = at,$$

à l'instant où la molécule placée à la distance x de l'origine des coordonnées commencera à s'ébranler.

L'on voit donc que les ondes formées dans un fluide, quelle que soit la nature de l'ébranlement primitif, se propagent toujours avec une vîtesse uniforme égale à celle qu'un corps grave aquerrait en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la profondeur du bassin qui contient le fluide, comptée depuis la surface du liquide dans l'état d'equilibre. Cette conclusion peut être étendue aux ondes formées dans une eau stagnante quelconque conformément à ce qui a été dit dans le N.° 1.

8. Je finirais ce Mémoire en remarquant que l'on peut trouver, par la méthode précédente, des solutions singulières de toutes les équations comprises dans la forme

$$0 = \frac{d^2z'}{dx'^2} + f.(x',y')\frac{d^2z'}{dx'dy'} + F(x',y')\frac{d^2z'}{dy'^2}.$$

A l'aide d'une transformation ingénieuse que l'on doit à M. Legendre, (*Voyez Calcul Intégral de* LACROIX *Tome II. pag.* 596) cette équation peut être transformée dans la suivante,

$$o = \frac{d^2z}{dy^2} - f.(x',y').\frac{d^2z}{dxdy} + F(x',y').\frac{d^2z}{dx^2} \dots (b)$$

en posant

$$z' = x.x' + y.y' - z$$

et observant que l'on a

$$x = \left(\frac{dz'}{dx'}\right); \quad y = \left(\frac{dz'}{dy'}\right).$$

Différenciant cette valeur de z' et remarquant que

$$dz' = x.dx' + y.dy'$$

il en résulte

$$dz = x'.dx + y'.dy,$$

donc

$$x' = \left(\frac{dz}{dx}\right) = p; \quad y' = \left(\frac{dz}{dy}\right) = q.$$

Il suit de là que l'équation (*b*) peut être mise sous forme

$$o = \frac{dq}{dy} - f.(p,q).\frac{dp}{dy} + F(p,q).\frac{dp}{dx},$$

laquelle rentre dans celle que nous avons attribuée à l'équation (A''').



MÉMOIRES

PRÉSENTÉS

A LA CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES

ET MATHÉMATIQUES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE TURIN.

OBSERVATIONS

SUR

QUELQUES MAMMIFÈRES HYBERNANS.

PAR JEAN-ANTOINE SAISSY

DOCTEUR EN MÉDECINE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ DE MÉDECINE DE LYON, ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES, LITTÉRATURE ET BEAUX-ARTS DE TURIN, DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES, BELLES LETTRES ET ARTS DE BORDEAUX, MEMBRE NON-RÉSIDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, BELLES-LETTRES, ET ARTS DE ROUEN, ETC. ETC.

Il ne s'agira ici que de quelques remarques sur la marmotte, le hérisson, le lérot et la chauve-souris. Elles auront pour objet 1.° La préférence que ces animaux donnent à divers alimens : 2.° Le temps où ils s'engourdissent, celui où ils reprennent toute leur activité : 3.° Nous examinerons s'il est vrai qu'il y ait du danger pour leur vie, de les reveiller avant le terme (la belle saison) que la nature semble leur avoir assigné : 4.° Nous prouverons que ces animaux absorbent, autant qu'il est possible, le gaz oxigène de

l'air atmosphérique : 5.° Enfin, nous démontrerons qu'ils peuvent vivre un temps assez considérable dans une atmosphère éminemment méphytique.

Une courte discussion sur ces divers points de zoologie, fondée sur des faits, m'a paru offrir quelque intérêt. C'est sous ce rapport seulement, que je crois ce travail digne de l'attention des savans auxquels je le soumets.

SECTION PREMIÈRE.

Quels sont les alimens dont se nourrissent les marmottes, les hérissons, les lérots et les chauve-souris ?

Ces animaux sont omnivores : il est toutefois des alimens qu'une espèce préfère, et que l'autre repousse.

La marmotte aime : 1.° L'herbe fraîche, tendre et d'une saveur douce, comme les feuilles, les tiges et la racine de scorsonère, la laitue, les choux, les raves et leurs feuilles : 2.° Les plantes alcalines; telles que les raiforts et leurs feuilles, la roquette, la pimprenelle etc. etc. : 3.° Les fruits, comme les pommes, les poires, la courge, le melon surtout : 4.° Le pain frais, la soupe de pain au bouillon, au lait; les châtaignes; les haricots, les pois : 5.° Le beurre, la viande soit crue, soit cuite. GIRTANNE (1) a avancé que cet ani-

(1) *Journal de physique*, année 1786.

mal ne mangeait pas de viande; deux marmottes qu'il avait chez-lui, n'ont jamais voulu en goûter. Que conclure de l'assertion de GIRTANNE ? De deux choses, l'une, ou ces marmottes font une exception à la règle générale, ou le fait a été mal observé; car toutes celles que j'ai eu à ma disposition, mangeaient de viande avec avidité: 6.° Elle (la marmotte), ne touche pas à la feuille de poirée ni à celle d'épinard.

Une particularité propre à cet animal (1), et dont aucun naturaliste n'a donné, que je sache, une description satisfaisante, c'est la mobilité illusoire des dents incisives de la machoire inférieure (2). Cette mobilité est plus manifeste latéralement que dans aucun autre sens, à tel point que ce quadrupède écarte, et rapproche ces deux dents à volonté. Frappé de ce phénomène, j'ai voulu m'assurer d'une manière directe, quelle pouvait en être la cause. La dissection m'a offert ce qui suit:

La machoire inférieure de la marmotte est divisée en deux parties; elles se joignent, en formant un angle aigu, par l'extrêmité antérieure de leur face interne, et non bout-à-bout comme dans l'homme et la plu-

---

(1) Le rat, l'écureuil, le loir, le lérot et le cochon d'Inde ont la même conformation.

(2) Daubenton, dans la description qu'il donne de la marmotte, ne fait pas même mention que cette machoire est de deux pièces. Buffon, histoire naturelle, T. XVII, in-12.

part des quadrupèdes. Leur moyen d'union est une symphyse amphiartrodiale assez lâche. La dent incisive que porte chaque pièce de la machoire, semble être la continuation de cette même pièce.

Or, ce ne sont pas les dents qui sont mobiles, car elles sont fixées dans leurs alvéoles par une racine beaucoup plus profonde que le corps de la dent n'est long (1), ce sont les pièces dont la machoire est composée, qui, en s'abaissant, font un mouvement de rotation, de manière que l'auge où s'attachent le masseter et le ptérigoïdien interne, est porté en dedans, et l'extrémité de la machoire unie à la symphyse, en déhors. Par ce mécanisme, quand la machoire est abaissée, les dents s'écartent l'une de l'autre, surtout les sommets; et elles se rapprochent, quand cette même machoire est élevée.

L'âge n'apporte aucun changement dans le moyen d'union, les marmottes les plus vieilles, comme les plus jeunes, ont la machoire inférieure en deux pièces unies

(1) Ces dents ressemblent aux défenses du sanglier; elles s'articulent, par gomphose, dans un canal profond, courbé, et dont la convexité répond à la base de la machoire; il est couché horisontalement tout le long de cette même base; il coupe presque à angle droit la base de l'angle de la machoire, et va se terminer à la partie interne, et la plus reculée de la dernière molaire. Le corps de la dent n'a que deux centimètres de long, tandis que la racine en a quatre. Cette même racine est creusée dans toute son étendue; sa cavité est tapissée d'un périoste délié, et donne passage aux nerfs et aux vaisseaux qui portent à la dent la vie et la sensibilité.

par une symphyse ligamenteuse. J'ai vérifié ce fait sur plusieurs individus de la même espèce et de tout âge, tous m'ont présenté le même phénomène. (1)

Le hérisson aime beaucoup le fruit; mais il aime encore davantage les insectes et la viande quelle qu'elle soit, même pourrie.

C'est une erreur de croire que cet animal se vautre sur les fruits tombés des arbres, et, qu'à la faveur des dards dont il est hérissé, les emporte dans sa retraite. PLINE (2) l'a dit, et après lui, GESNER, ALDROVANDE, JULES-CÉSAR, SCALIGER et la plupart des naturalistes modernes l'ont répété. M.r BLUMENBACH (3) dit, » il est certain qu'il (le hérisson) pique les fruits » avec les épines de son dos, et les porte ainsi dans » son terrier ». J'ai mis plusieurs fois et à dessein, une certaine quantité de pommes, de poires à la place, où l'on avait coutume de mettre les alimens destinés à ces animaux; ils ne la quittaient qu'après avoir tout mangé. Je ne me suis jamais aperçu qu'ils cherchassent à saisir avec leurs piquants, les fruits qu'on leur donnait, pour ensuite les emporter dans les endroits où ils se cachaient.

Le lérot mange de tous les fruits doux, frais, ou

(1) Cette substance ligamenteuse est de même nature que celle qui unit le corps des vertèbres entr'eux.

(2) . . . . ac volutati supra jacentia poma affixa spinis, unum amplius tenentes ore, portant in cava, arbores. PLIN. lib. VIII, pag. 139.

(3) Manuel d'histoire naturelle, T. 1, pag. 105.

secs, aussi est-il le dévastateur des espaliers; ce sont les déprédations qu'il fait dans les jardins qui lui ont mérité le nom de *rat fruitier*. Il est avide du sang des petits oiseaux, il le suce en leur écrasant la tête. Cet animal se nourrit aussi de graines de chanvre, de noix, d'amandes douces, de faines, de toutes les espèces de fromage, de suif et de lard.

La chauve-souris mange de mouches, de papillons, surtout de phalènes, d'araignées, de lard et de suif.

Tous ces animaux boivent infiniment peu, ou plutôt ils ne boivent pas; (1) car j'en ai gardé pendant six mois, un an même, sans leur donner d'eau, cela n'empêchait pas qu'ils ne rendissent une quantité d'urine assez considérable, et ils ne paraissaient pas souffrir du défaut de boisson. C'est donc à tort que quelques écrivains ont avancé que les marmottes boivent beaucoup. J'ai fait à ce sujet plusieurs expériences qu'il serait fastidieux de répéter ici; toutes prouvent que ces animaux ne boivent pas. Au reste, je n'ai jamais donné d'eau aux hérissons, aux lérots, ni aux chauve-souris.

---

(1) J'ai gardé un loir, pendant deux ans, je ne l'ai jamais vu boire quoique, à des intervalles fort éloignés, je misse de l'eau dans sa cage. Cependant tous ces animaux dès qu'ils sont sous la cloche hydro-pneumatique, lapent à plusieurs reprises.

SECTION SECONDE.

Y-a-t-il un temps fixe et déterminé pour l'engourdissement et le reveil des mammifères hybernans, quelle que soit la température de l'atmosphère ?

Tous les naturalistes anciens et modernes ont observé que le froid est la cause déterminante de la torpeur à laquelle sont sujets la marmotte, le hérisson, etc. pendant l'hiver; on sait aussi, que si on garde ces animaux dans un appartement dont la température soit constamment au-dessus de 8° à 9°, thermomètre de Réaumur, ils ne s'engourdissent pas, quelle que soit d'ailleurs la rigueur de la saison. Ce fait est trop connu pour s'y arrêter davantage. Cependant SPALLANZANI dit que » la chaleur si douce pour les hommes, indiquée sur » le thermomètre par le tempéré, cette chaleur engourdit les loirs (1) ». J'ignore jusqu'à quel point l'observation de ce célèbre naturaliste, est exacte ; mais je sais par expérience que le lérot conserve toute son agilité jusqu'à ce que la température de l'atmosphère soit à 5.° (therm. décimal) au-dessus de zéro (2).

Un naturaliste de nos jours, a avancé dans un ou-

(1) Opusc. de physique végét. et anim, tom. 1, pag. 116.

(2) Recherch. expérim. anat. chimiq. sur la physique des mammifères hybernans, pag. 18.

vrage qu'il vient de faire paraître, « que le sommeil » hivernal de ces animaux venait à certaines époques » déterminées, quelle qu'ait été la variété de la saison; » lorsque l'automne se prolonge ou que le printemps » est hâtif, ils s'endorment cependant et se réveillent » aux mêmes époques de l'année et presque au même » jour (1) ». J'ignore comment et dans quels lieux M.r MANGILI a fait ses observations; l'expérience de tous les temps; les faits constamment observés par les naturalistes déposent contre l'assertion du naturaliste italien. Tous prouvent que si le froid se fait sentir de bonne heure, ces animaux se cachent et s'engourdissent; si le printemps est hâtif, le réveil est précoce (2). BUFFON dit qu'il arrive souvent que les loirs, (et probablement tous les mammifères hybernans) se raniment même pendant l'hiver; « car, dit cet homme » immortel, il y a des heures, des jours et même des » suites de jours, dans cette saison où la liqueur du » thermomètre se soutient à 12°, 13°, 14°, etc., et pendant ce tems doux les loirs sortent de leurs trous pour chercher à vivre etc. (3) ». Après une autorité si imposante, s'il m'était permis d'offrir les résultats de mes expériences et de mes observations, on verrait qu'ils

---

(1) Mangili, journal général de Sédillot, N.° 137.

(2) Mais on sait aussi que vingt-quatre heures de froid un peu rigoureux, les fait rentrer dans leur retraite et les replonge dans la léthargie.

(3) Hist. nat. Tom. XVI, in-12, pag. 207 et suivantes.

ont beaucoup de rapport avec ce qu'a dit le Pline français. En effet, j'ai retiré des hérissons, des lérots, profondément engourdis, d'une atmosphère dont la température était à 2° au-dessous de zéro, et je les ai fait passer de suite dans un appartement où la chaleur était, nuit et jour, 9° à 10° au-dessus de la congélation. Se reveiller, marcher, prendre de nourriture, recupérer l'agilité et la température qui leur sont propres, a été l'ouvrage de quelques heures. Si on laisse ces animaux dans cette atmosphère tempérée ils ne retombent pas dans la torpeur, quelque rigoureuse que soit d'ailleurs la saison.

Pendant les hivers de 1806 et 1807, j'ai répété plusieurs fois les expériences dont je viens de parler; en laissant ces quadrupèdes, quinze jours, un mois dans la même température, ils ne s'y sont jamais engourdis; mais lorsque je les sortais de là et que je les faisais repasser dans l'appartement où le froid était 2° au-dessous de zéro, même au degré de la congélation; quarante-huit heures suffisaient pour les replonger dans la plus profonde torpeur. (1)

L'automne de 1807 a été belle, la température était encore fort élevée en décembre, aussi voyait-on, le soir, voltiger les chauve-souris, comme en septembre.

Pallas a engourdi des loirs, en été, en les mettant dans une glacière. J'ai de la même manière et dans la

(1) Recherch. expérim. anat. chim. sur la physique des anim. mammifères hybernans, Mémoire couronné par l'Institut de France. V. la note p. 23 et 24.

même saison, engourdi des hérissons, des lérots. Enfin une marmotte a été engourdie profondément (artificiellement) le 28 mai et le 3 juin de 1807 (1). Or, tous les faits que nous venons de rapporter auraient-ils eu lieu, si, comme M. MANGILI l'assure, les mammifères hybernans s'engourdissaient et se reveillaient à des époques fixes quelle que soit la température de l'atmosphére ?

L'observation de SPALLANZANI sur les Salamandres ne peut infirmer en aucune manière les faits que nous venons de citer. SPALLANZANI a observé, dit GIRTANNE, » que les Salamandres se cachent dans la terre et s'en-» gourdissent au mois d'octobre, avant que le ther-» momètre à l'ombre soit aussi bas que + 10° au-des-» sus de zéro, et qu'elles reparaissent au mois de fé-» vrier, quoiqu'il gèle toute la nuit, et que pendant » le jour le thermomètre continue d'être plusieurs de-» grés au-dessous de + 10° (2) ». Cette observation ne conclut rien, je crois, pour les mammifères hybernans à sang-chaud. Ce serait abuser de l'analogie, si M.r MANGILI voulait en tirer des inductions favorables à son opinion.

---

(1) Ouvrage cité.

(2) Mém. sur l'irritab. jour. de phys. ann. 1790, tom. 36.

SECTION TROISIÈME.

Y-a-t-il du danger pour la vie de la marmotte, du hérisson, etc. de les reveiller avant le temps prescrit par la nature?

Quelques auteurs l'ont pensé, et, parmi eux, M.[r] Blumenbach, dit que « ces animaux une fois livrés à » ce sommeil (l'engourdissement) on ne peut sans » danger pour leur vie, les en retirer avant le temps » où il finit. »

L'expérience ne paraît pas confirmer cette assertion, en effet, il n'est personne qui, ayant eu à sa disposition quelqu'un de ces animaux, ne puisse déposer contre la proposition de M.[r] Blumenbach qui, d'ailleurs est un savant très-recommandable. Pendant les hivers de 1806, 1807 j'ai alternativement reveillé et réengourdi, un nombre considérable de fois, les mêmes animaux, (pour les expériences qu'exigeait le travail, dont je m'occupais alors), je ne me suis jamais apperçu que ces reveils et ces torpeurs alternatifs fatigassent ces animaux le moins du monde.

SECTION QUATRIÈME.

Existe-t-il une classe d'animaux dont la respiration soit capable d'épuiser tout le gaz oxigène de l'air atmosphérique qui l'environne?

Le 18 août 1808 à 10 heures 5 minutes du matin, je mis un jeune hérisson, de moyenne grosseur, sous

une cloche hydro-pneumatique de la capacité de deux cent-quarante pouces cubiques (1); à 10 heures 50 minutes, l'air contenu sous le récipient, n'était plus propre à entretenir la combustion; car, en ayant retiré une mesure, j'y plongeai une bougie allumée, la flamme et le lumignon s'y éteignirent. Ce n'a été cependant, qu'à 11 heures 55 minutes que l'animal expira. J'ai de suite éprouvé l'air dans lequel cet animal était mort; les résultats ont été:

Que le phosphore auquel j'avais mis le feu à travers les parois de l'eudiomètre, s'est fondu, comme de la cire, sans éclat et sans produire le plus léger refoulement, quoique j'eusse complétement rempli d'air l'eudiomètre, et l'eau n'est nullement montée dans l'instrument.

La combustion lente du phosphore, d'après le procédé conseillé par un des plus célèbres chimistes (2) de l'Europe, m'a donné le même résultat. Voici la manière avec laquelle j'ai procédé. Un autre eudiomètre de la même forme et de la même capacité que celui qui m'a servi pour les

---

(1) Pour éviter, autant qu'il est possible, toute répétition toujours fastidieuse, je crois nécessaire d'avertir ici, que dans toutes mes expériences je me suis servi de la même cloche: des mêmes eudiomètres, gradués par pouces cubes, et de la capacité de vingt pouces: des mêmes flacons gradués aussi par pouces cubes.

Les expériences que j'ai faites sur le hérisson, le lapin, le rat et le moineau sont absolument les mêmes quant au mode d'exécution.

(2) Berthollet, annales de chim. an VIII, N.° 100.

expériences précédentes, rempli parfaitement du même air, étant placé sur la planche de la cuve hydro-pneumatique, j'y ai introduit un cylindre de phosphore, du poids de trois grammes 8215 dix milligrammes, fixé sur une tige de verre, comme le prescrit le savant que nous venons de citer. D'abord le phosphore a jeté un faible nuage qui a disparu dans l'instant même. J'ai laissé cet appareil pendant 24 heures; il n'y a point eu d'ascension d'eau dans l'eudiomètre, et le bâton de phosphore n'a pas éprouvé de diminution que l'on pût constater.

Un flacon gradué et de la capacité de trente pouces cubes, a été rempli de l'air de la même cloche, et sans sortir le goulot de dessus l'eau, j'y ai introduit 7 grammes 6429 dix milligrammes de sulfure de potasse (1), et j'ai laissé assez d'eau pour le faire fondre (2); puis le flacon étant parfaitement bouché à l'Eméry, au sortir de la cuve hydro-pneumatique, essuyer le goulot, le plonger, à plusieurs reprises, dans de la cire fondue (3) n'a été que l'ouvrage d'un instant.

J'agitai le flacon plusieurs fois dans les vingt-quatre heures: au bout de huit jours, je l'ai débouché ren-

(1) On sent de reste qu'il y a quelques milligrammes de cette substance, de fondus en passant à travers l'eau.

(2) Environ un demi pouce cube.

(3) J'ai trouvé cet expédient aussi sûr et plus commode, que de plonger le goulot du flacon dans un vase où il y a de l'eau.

versé dans un vase plein d'eau; ce liquide n'a aucunément monté dans le bocal, il y a eu seulement un échange, c'est-à-dire que l'eau sulfurée du flacon est tombée dans le vase, comme étant plus pesante, et une pareille quantité d'eau de celui-ci a pris sa place.

Immédiatement après avoir retiré la quantité d'air qui a servi aux expériences décrites; j'ai fait passer successivement sous la cloche, contenant encore du même air, un moineau, une souris et un gros rat. Le premier a été suffoqué en moins de cinquante secondes; les deux autres ont résisté deux minutes et demie.

La respiration du hérisson, mise en parallèle avec celle d'autres animaux à sang-chaud, m'a paru la manière la plus propre à faire voir la différence qui existe dans les facultés physiques et chimiques de cette fonction, dans les mammifères hybernans, d'avec celles des autres animaux à sang-chaud. Quelques expériences comparatives mettront, si je ne me trompe, cette vérité hors de doute.

Le 19 août de la même année à une heure 25 minutes après midi, j'ai placé un jeune lapin sous la cloche hydro-pneumatique; à 2 heures 5 minutes, la flamme et le lumignon d'une bougie se sont éteints dans l'air puisé de cette même cloche. A deux heures vingt-six minutes, l'animal a expiré. J'ai essayé l'air contenu sous le récipient en répétant rigoureusement les expériences dont j'ai fait mention au sujet du hérisson. Les résultats ont été:

Que le phosphore a brûlé sans éclat; il n'y a point eu de refoulement, cependant l'eau est montée un pouce dans l'eudiomètre.

La combustion lente du phosphore m'a offert le même résultat (1).

Le sulfure de potasse a produit une absorption, 1, 5 :: 30.

Le 20 du même mois à 11 heures 35 minutes du matin, je mis un gros rat sous la cloche; à midi 35 minutes, une portion d'air retirée de cette même cloche, a éteint la flamme et le lumignon de la bougie; à midi 40 minutes le rat est mort.

Le phosphore a faiblement brûlé dans l'eudiomètre, et l'ascension de l'eau a été d'un pouce et demi.

La combustion lente du phosphore a donné le même résultat.

Le sulfure de potasse a fait monter l'eau deux pouces et un quart dans le flacon.

Le 21 à 1 heure 30 minutes après midi, un moineau a été placé sous la cloche; à 3 heures 5 minutes l'air qui y était contenu a fait vaciller la flamme de la bougie, puis il l'a éteinte; mais le lumignon est resté embrasé; à 3 heures 15 minutes, la flamme et le lumignon se sont éteints, et l'animal a expiré.

---

(1) Le phosphore a jété un nuage plus considérable que dans l'air où avait respiré le hérisson.

Le phosphore a brûlé et jeté même quelque éclat; l'eau est montée deux pouces dans l'eudiomètre.

Même résultat par la combustion lente du phosphore.

Le sulfure de potasse a produit une absorption, 3:30.

Ces animaux ont été mis successivement sous la cloche hydro-pneumatique dont la capacité, nous le répétons, est de deux-cent quarante pouces cubes dont il faut déduire :

Pour le hérisson . . .	20	Pouces cubes.
Pour le lapin	30	
Pour le rat	10	
Pour le moineau . . .	4	

De sorte que la masse d'air qui enveloppait chaque animal sous la cloche, était, savoir :

Pour le hérisson . .	220	Pouces cubes.
Pour le lapin	210	
Pour le rat	230	
Pour le moineau . .	236	

D'après les expériences rapportées, il est évident, je crois, que le gaz oxigène a été absorbé dans les proportions suivantes (1),

(1) En prenant pour base que l'air atmosphérique contient vingt-un centième de gaz oxigène.

SAVOIR:

LE HÉRISSON.	LE LAPIN.	LE RAT.	LE MOINEAU.
La totalité.	0, 75	0, 625	0, 425

D'après les expériences qui suivent la question proposée dans cette section, il paraît qu'on peut tirer les conséquences suivantes :

1.° Que le hérisson, (et probablement tous les mammifères hybernans) a une action de respiration plus prolongée, et supérieure à celle des autres animaux à sang-chaud, telle qu'elle lui donne la faculté de vivre une heure et cinq minutes dans un air qui n'est plus propre à la combustion; tandis que le lapin n'y a resisté que vingt-une minute; le rat, cinq minutes, et le moineau a expiré dès que la flamme et le lumignon de la bougie se sont éteints dans l'air où il était plongé.

2.° Qu'il absorbe tout le gaz oxigène de l'air atmosphérique (1), qu'on a isolé dans une cloche hydro-pneumatique dans laquelle l'animal est renfermé.

3.° Qu'elle (l'action de respiration) lui permet de respirer, un temps assez considérable, un air qui n'est

(1) C'est encore ici une particularité qui distingue spécialement ces animaux des autres animaux à sang-chaud.

plus propre à la combustion, ni à la respiration des autres animaux à sang-chaud.

4.° Que cet animal ne périt que quelques minutes après avoir complétement absorbé tout le gaz oxigène de l'air atmosphérique dans lequel il est plongé; tandis que les animaux qui n'hivernent pas, succombent: les uns après en avoir consommé les soixante et quinze centièmes; les autres, soixante-deux et demi, et les volatilles, quarante-deux et demi.

SECTION CINQUIÈME.

Le hérisson, plongé dans le gaz azote pur, est-il suffoqué aussi promptement que les autres animaux à sang-chaud qui n'hivernent pas?

Le 24 août 1808, à 8 heures du matin, j'ai fait passer successivement sous la cloche hydro-pneumatique remplie de gaz azote pur, un moineau, une souris, un rat, un hérisson (1).

Les résultats obtenus par ces expériences sont exprimés dans le tableau suivant:

---

(1) Il n'est pas inutile, je pense, de faire observer ici que le second animal n'a été introduit sous la cloche qu'après que le premier eût expiré, ainsi des autres.

Temps que ces animaux sont demeurés vivans dans le gaz azote pur.

LE MOINEAU.	LA SOURIS.	LE RAT.	LE HÉRISSON.
Minutes . 0, 5	2, 5	2, 5	15

Si les mammifères hybernans peuvent résister un temps aussi considérable, dans un gaz éminemment méphytique, tel que l'azote, est-il étonnant qu'ils épuisent tout le gaz oxigène d'une masse donnée d'air atmosphérique. Mais à quoi tiennent l'une et l'autre de ces facultés ?

Ne serait-ce pas à leur organisation particulière ? Je le crois. En effet, cette organisation est telle qu'elle leur permet de précipiter, ralentir, suspendre même la respiration. La ténuité des vaisseaux du cerveau (1), l'ampleur de ceux des cavités thorachique et abdominale, mettent, pour un temps, l'organe encéphalique à l'abri de la compression qui doit suivre la lésion des fonctions de l'organe respiratoire. Les premiers en ad-

(1) Je me suis assuré par des dissections comparatives et multipliées, que les mammifères hybernans ont les vaisseaux de la masse cérébrale beaucoup plus déliés, toute chose égale d'ailleurs, que les animaux qui n'hivernent pas.

mettant peu de sang, et les derniers recélant la majeure partie de ce liquide. D'autre part, les vaisseaux des poumons, comme ceux du cerveau, sont peu dilatés (1), et par cela même cet organe s'engorge difficilement. Cette disposition permet à l'organe respiratoire des hybernans, une action beaucoup plus prolongée qu'elle ne l'est dans les animaux à sang-chaud qui n'hivernent pas. C'est aussi à cette même organisation qu'est dûe, sans doute, la longue résistance que ces animaux opposent lorsqu'on les fait périr par la submersion (2).

De ces diverses considérations nous croyons pouvoir conclure :

1.° Que les animaux dont nous nous sommes spécialement occupés, sont omnivores et qui boivent peu.

2.° Que leur engourdissement et leur reveil dépendent impérieusement du degré d'abaissement ou d'élévation de la température atmosphérique, et qu'il n'y a pour ces phénomènes, aucune époque fixe et déterminée.

3.° Qu'on peut, lorsqu'ils sont profondément engourdis, les reveiller sans craindre pour leur vie, en prenant toutefois la précaution de ne pas les faire pas-

---

(1) Recherches expérimentales anatomiques, chimiques, sur la physique des mammifères hybernans, pag. 61.

(2) Sous ce rapport, ces animaux ont quelque analogie avec les mammifères qui n'hivernent pas, lorsque ces derniers n'ont pas encore respiré.

ser trop précipitamment d'une température basse à une température fort élevée.

4.° Que ces animaux (si on en juge par le hérisson) ont la faculté d'absorber tout le gaz oxigène de l'air atmosphérique, et qu'ils peuvent respirer, pendant un temps assez considérable, un air qui n'est plus propre à la combustion, ni à la respiration des autres animaux à sang-chaud.

5.° Enfin, que les mammifères hybernans sont de tous les animaux à sang-chaud, ceux qui plongés dans un gaz éminemment méphytique, résistent le plus longtemps à son action délétère.

NOTICE

SUR LE CORINDON ROUGE-JAUNATRE DE TRAVERSELLE,

VALLÉE DE BROZZO;

SUR LE PLASMA DE LOCANA, MÊME VALLÉE;

SUR LE MANGANÈSE COULEUR DE ROSE DE PIAN-PRA,

VALLÉE DE SOANA.

Objets qui n'avaient pas encore été découverts en Piémont.

PAR ANTOINE VAGNON.

NOTICE

SUR LE

CORINDON ROUGE-JAUNATRE DE TRAVERSELLE, VALLÉE DE BROZZO; SUR LE PLASMA DE LOCANA; SUR LE MANGANÈSE COULEUR DE ROSE DE PIAN-PRA, VALLÉE DE SOANA, OBJETS QUI N'AVAIENT PAS ENCORE ÉTÉ DÉCOUVERTS EN PIÉMONT.

Lue dans la Séance du 30 Novembre 1812.

Un voyage minéralogique d'un mois et demi, que j'ai fait cette année dans quelques Vallées du Piémont, m'a fourni le moyen de découvrir des substances minérales, que je considère comme absolument nouvelles.

Je me fais un précis devoir d'en présenter une courte description à l'Académie Impériale des Sciences de Turin, qui a toujours beaucoup contribué par ses beaux travaux, à l'avancement des diverses branches de l'histoire naturelle, de la physique et de la chimie.

J'ose espérer que cette célèbre et savante Compagnie daignera accueillir avec une extrême indulgence ces faibles preuves de mon zèle pour la minéralogie de notre pays.

La Commune de Traverselle, Vallée de Brozzo, déjà si célèbre par ses superbes et abondantes pro-

ductions du règne minéral, va augmenter sa renommée par l'heureuse découverte que je viens de faire d'une substance que je crois d'une très-grande importance pour la lithologie.

Cette substance est généralement d'une couleur plus ou moins rouge-jaunâtre, le plus souvent offrant des formes mal prononcées, et indéterminées, et qui par la bizzarrerie de leur structure sont certainement très-difficiles à decrire, et faites pour exercer toute la sagacité d'un savant cristallographe.

On aperçoit pourtant parmi ces cristaux des rhombes assez réguliers, nettement tronqués sur leurs quatres angles.

D'autres ont deux ou trois faces trapézoïdales irrégulières, qui sont de portions de prismes, surmontées par des rhombes.

J'observerai qu'ils sont pour l'ordinaire fort-applatis, tandis que d'autres morceaux présentent de petits rhombes, qui sont figurés en lignes, qu'on pourrait appeler d'accroissement : phénomène de cristallisation, qui me paraît singulier et fort peu aisé à expliquer.

Je dois aussi faire remarquer, que ces cristaux ont par leurs formes cristallines une grande similitude avec certains grenats.

Ils sont d'un tissu lisse sur les faces de dessus, et au contraire striés transversalement par dessous, et sur les pans latéraux des prismes, et des rhombes.

Leur grandeur est variable depuis un pouce jusqu'à quelques lignes.

Ils sont à peine un peu translucides sur leurs bords; mais vus en masse ils sont opaques : ils étincellent vivement avec le briquet : rayent le quartz : mais malgré leur dureté ils sont fort fragiles ; ce qui dérive de leur état de décomposition.

Leur éclat paraît vitreux, quoique d'un aspect gras: médiocrement pesants; n'exhalant aucune sorte d'odeur sous le souffle; ne happant pas à la langue.

Ces cristaux sont presque tous isolés ; quelques-uns sont mélangés avec leur même matière en masse, avec de la chaux carbonatée blanche, translucide, avec une variété de rayonnante asbestiforme verte informe, et d'autres échantillons cristallisés sont contenus dans le granit.

Le gissement de ces cristaux est un roc de granit gris-noirâtre, qui passe en décomposition.

En faisant creuser par-dessous, j'ai rencontré une quantité de fragmens de ces cristaux, qu'il est fort difficile de trouver régulièrement conformés.

Je dirai enfin que cette pierre a tous les caractères externes du véritable Corindon.

Le gissement du Corindon gris du Biellais est aussi une variété de granit.

On trouve les Corindons adamantins dans les roches granitiques : ceux de l'Inde sont souvent accompagnés de feldspath translucide, d'épidote, de mica, de talc, de grenat, de zircon, de fer oxidulé, et de quartz.

La gangue du Corindon adamantin de la Chine est

de même une roche granitique (Brongniart tom. I.er page 430).

Dans une autre occasion, et une saison plus propice, je me flatte que faisant d'exactes et patientes recherches, je pourrai rencontrer ce Corindon en cristaux réguliers, et bien terminés, et par ce moyen il me sera plus facile de les décrire avec précision.

Je crois que le Corindon, qui nous occupe, pourrait remplacer l'émeril: qualité, qui le rendrait très-utile aux arts, et qui pourrait même devenir une branche de commerce fort avantageuse au Piémont.

La Montagne de Montayeu par-dessus Traverselle Vallée de Brozzo, m'a aussi offert trois petites pièces de cristal de roche d'une belle transparence, recélant dans leur intérieur, des filets aciculaires, pour la plûpart isolés, de rayonnante asbestiforme verte, et blanche.

Je dois aussi faire mention d'un gros rocher de Montayeu, qui est situé au nord sur la gauche en montant, et à deux, ou trois pas du sentier, qui est presque tout formé par du grenat en masse jaune-roussâtre, qui tombe en décomposition; qui renferme en outre des grenats de la même couleur, cristallisés les uns en dodécaèdres rhomboïdaux, et les autres aussi en dodécaèdres à faces trapézoïdales, et hexagonales, implantés sur le même grenat en masse, opaques, grouppés, et isolés ordinairement d'un petit diamètre.

J'ai aussi fait donner plusieurs mines à la fosse de

fer du milieu à Montayeu, et leur explosion m'a procuré de jolis cristaux d'idocrase, verts de bouteille, en prismes hexaèdres très-comprimés, à deux faces grandes égales, et paralléles, et quatres petites inégales entre-elles.

Ces prismes sont terminés à leur sommet par une figure polyédrique-hexaèdre fort alongée avec une arête tranchante, qui la divise en deux parties inégales : ce qui fait parfaitement ressembler ces idocrases au fer des mines.

D'autres cristaux sont des prismes à huit pans très-rapprochans de l'idocrase unibinaire de M.r Haüy (planche 43, fig. 70, tom. 2, page 577).

Ils sont striés longitudinalement; et en les regardant en masse, on les voit un tant soit peu translucides sur leurs bords, et assez éclatans.

Il y en a, qui ont la longueur de plus d'un pouce, et la largeur de 7 à 8 lignes: d'autres sont disposés en petits rayons divergens de la base.

Ces mines ont aussi détaché des cristaux de pyroxène vert, tous fracturés, et n'offrant rien de prononcé : ils sont du même genre que ceux, que j'y ai découvert en 1808.

A mon passage à Locana j'ai examiné attentivement le grand bloc roulé de serpentine verte, dans lequel M.r Dominique Perotti mon infatigable et courageux compagnon de voyage, a eu le bonheur de recueillir en 1809, 1810 et 1811 de magnifiques cristaux de Co-

rindon-Harmophane noir-roussâtres, en prismes hexaèdres bien réguliers, tronqués à leurs sommets, et attachés par la base à leur gangue.

Ces cristaux sont analogues au Corindon prismatique de M.r Haüy (planche 40., fig.e 98, tom. 3, pag, 5).

Actuellement il n'existe plus aucun Corindon-Harmophane dans ce rocher : cela à mon vif regret.

M.r Perotti a déposé au Musée de minéralogie de Turin, et dans la belle collection du feu Docteur Bonvoisin un bon nombre d'échantillons de ce rare et précieux produit de la lithologie du Piémont.

J'ai rencontré à l'ouest de cet endroit, dans un bloc roulé de serpentine, le vrai Plasma de Werner, qui est de couleur vert-pâle en petites veines bien distinctes, plus ou moins colorées.

Cette pierre est assez translucide sur les bords : rendant de vives étincelles sous le choc du briquet : se laissant rayer par une pointe d'acier : d'une texture communément écailleuse, ayant la cassure du même genre : passablement pesante : produisant une odeur argileuse sous le souffle : douée d'un éclat presque huileux, et encroûtée par un talc-verdâtre-micacé, qui lui sert de caractère empirique.

Mais à la vérité il faudrait pouvoir trouver le Plasma en place, et en filons bien prononcés pour décider avec connaissance de cause, sur sa nature, et origine géologique.

Les minéralogistes les plus célèbres ne sont pas d'accord sur le Plasma.

Estner, le regarde comme une calcédoine mélangée de terre magnésienne.

Widenmann et Napione le considèrent comme une variété de calcédoine.

Werner au contraire en a formé une espèce particulière (Brochant tom, I.er, pages 279 et 280).

M.r Brongniart l'appelle *Silex-Plasme*, disant, que ce Silex est très-voisin de la calcédoine, mais qu'il a une couleur verte qu'on ne peut attribuer à cette agate, etc.

M.r Napione dans sa Minéralogie, page 171 a appliqué le mot *Plasma di Zaffiro* au cristal de roche bleu, ou faux saphir, etc.

Cette pierre n'a pas encore été analysée. (Brongniart tom. II., pag. 398 sup.).

On me permettra de dire par digression que les belles prairies, les jolis arbres, les montagnes pour la plupart pyramidales de la Vallée de Soane, couronnées par une brillante verdure, font certainement un agréable contraste, avec les aspects terribles, imposans, et vraiment alpestres de la Vallée de Locana.

Je parlerai maintenant d'une matière métallique tout-à-fait neuve en Piemont, et qui pourra être d'une grande utilité, une fois, qu'elle sera parfaitement connue.

C'est le Manganèse rose, qui se trouve entre Pian-

pra, et l'alpe de Santanel, Vallée de Soana, en un gros bloc roulé, qui à son extérieur est recouvert par une écorce fort mince de Manganèse gris-noirâtre, compacte, ayant très-peu d'éclat métallique, et ne tâchant nullement les doitgs: mais l'ayant rompu, comme il faut, il m'a montré dans son intérieur toutes les gradations possibles du plus beau rose, qui est ordinairement nuancé par du jaune, du gris-noirâtre, et du blanc, formé par du quartz assez translucide; mélange, qui produit de jolis morceaux, qui sont parfois rubanés, rayés, et chinés, en rose, en jaune, et en blanc, presque toujours encroutés par le Manganèse gris-noirâtre: tandis que d'autres échantillons sont constitués par des tâches bien marquées roses, jaunes, noires; et blanches, qui sont assurément très-agréables.

Quoiqu'à mon avis les plus belles pièces sont celles qui intérieurement sont presque toutes roses revêtues de gris-noirâtre.

Ce Manganèse étincelle plus ou moins avec le briquet suivant les endroits, où il est frappé par l'acier.

Son tissu, et sa cassure sont en général grenus à petits grains.

Il n'est pas fragile, qualité essentielle, qui doit permettre de le travailler avec succès.

En masse il est opaque, et très-rarement translucide: il ne l'est pas davantage sur les minces bords de ses fragmens.

La matière rose, et jaune n'a qu'un aspect pure-

ment pierreux, qui est bien éloigné du brillant métallique.

Ce Manganèse est entièrement informe: il n'offre pas le moindre indice de cristallisation.

Dans les parties colorées, il se laisse rayer un peu par le quartz.

Il est passablement pesant: assez froid au toucher.

En raison de sa notable dureté, je le crois fort capable de recevoir un beau poli.

En observant avec attention tous les caractères extérieurs de ce minéral, j'ose avancer, qu'il a une forte analogie avec le Manganèse lithoïde de BRONGNIART, avec le Manganèse rouge de M.r BROCHANT, et finalement avec le Manganèse oxidé blanc et rose silicifère de M.r HAUY: production minérale, qui passe pour très-rare.

M.r BROCHANT dit, que le Manganèse rouge est une substance très-rare. On le trouve suivant cet auteur, en Transilvanie, à Kapnik, à Offenbanya, et surtout à Nagyag, où il fait partie de la gangue d'un filon aurifère, et de celui, qui tient l'or blanc, et la mine connue sous le nom d'or de Nagyag (tellure des chimistes). Il est accompagné principalement de fahlerz, de galène, de blende, de pyrites, etc.

EMMERLING, et WIDENMANN annoncent, qu'on en a aussi trouvé à S.te Marie aux mines en Alsace, à Sem dans le Comté de Foix, ainsi qu'à Kremnitz en Hongrie. (BROCHANT tom. I.er, pages 427 et 428).

D'après M.r Brongniart, tom. II., pag. 111 on peut soupçonner avec Bergmann, MM.rs Lampadius, et le Lièvre, que certains minérais de Manganèse rose de Kapnik, sont de vrais carbonates de Manganèse, et diffèrent essentiellement de la chaux carbonatée brunissante, et du fer spathique manganésié.

M.r Brochant a une opinion très-différente de celle de M.r Brongniart, puisqu'il considère le Manganèse rouge, comme un braunspath très-chargé de Manganèse.

La seule substance, à laquelle on pourrait comparer notre Manganèse, serait le quartz-laiteux, ou rose de Brochant, qui selon les auteurs en diffère cependant par un éclat gras, par sa cassure conchoïde, et enfin par plus de transparence.

Pourtant ce sera à l'analyse chimique à lui assigner la place qu'il doit occuper, et le classifier convénablement d'après ses principes constitutifs.

On observe un bloc roulé de cette matière dans le chemin, qui va à Santanel.

Sur la gauche de ce chemin proche d'une haute et bruyante cascade, qui est postée à la droite, on voit aussi ce Manganèse formant un filon horizontal de la largeur de plus d'un pied, qui a pour gissement un schiste-micacé disposé en grandes couches aussi horizontales.

J'aurai l'honneur de porter au Musée de l'Académie des échantillons de ce minéral.

On trouve en outre dans ces contours de la rayonnante asbestiforme verte, et de l'amianthe blanche soyeuse, des serpentines, des granits, des gneiss, etc. etc.

En traversant les montagnes de S.t Marcel à Champourcher, au-dessus, et au nord d'un petit lac glacé du mont de Logne, Commune de Fénis en Vallée d'Aoste, j'ai retrouvé ce même Manganèse rose roulé.

Mais il aurait fallu pouvoir parcourir les montagnes supérieures pour découvrir ce métal en filons bien marqués.

Il existe aussi du Manganèse dans d'autres endroits du Piémont, comme le Manganèse gris d'une texture granuleuse, fort fine, mêlé d'épidote violâtre aciculaire, et peu cristallisé, ayant pour gangue un quartz blanc, et grisâtre, et son gissement dans le schiste-micacé, proche des forges de Viù sur la gauche, et bords de la Chiara:

Le Manganèse-épidoté, d'un violet foncé, compacte, et cristallisé, uni avec des parcelles de Manganèse gris-métalloïde, du quartz blanc, et du schiste-micacé, de Mezzénile, Vallée de Lans.

La fameuse mine de Manganèse de Praborn, Commune de S.t Marcel, a été décrite par MM.rs Robilant, Napione, Saussure et Cordier.

Il est à remarquer, que le Manganèse est très-utile aux arts, comme il est facile de s'en convaincre par les ouvrages de chimie, minéralogie, etc. etc.

J'énoncerai seulement, que la médecine même l'employe pour la guérison de la teigne.

Au bas du lac de Logne, j'ai ramassé du feldspath d'un beau vert, d'un tissu tendant au lamelleux, qui étincelle avec l'acier, quoique fort cassant. Ce feldspath est en place.

Des rochers de serpentine très-escarpés, et d'un abord fort dangereux de Val-Coccia, Commune de Champourcher, m'ont offert des grenats nobles cristallisés, rouges-foncés, assez limpides, unis avec des alalites cristallisés, et des lames hexagonales de mica vert: le tout posé sur du grenat en masse rougeâtre, et des serpentines grisâtres, tout-à-fait semblables à ceux de la Mussa, Vallée d'Ala.

Un épais brouillard, et la briéveté du temps, m'ont forcé d'examiner fort à la hâte ces différentes substances dans leur gissement. Il a fallu me contenter d'en détacher quelques morceaux assez bien caractérisés.

Quoiqu'on ne doive point dissimuler, que le cristaux d'alalite deviennent journellement plus rares à la *Testaciarva* de la Mussa, et au voisinage d'Ala.

Je crois, que c'est une chose importante, que d'avoir trouvé une nouvelle localité de ce genre de pierre en Piémont; qui jusqu'à cette époque est entièrement inconnu dans la lithologie des autres contrées de l'Europe.

Dans ce même Vallon, il existe du quartz rouge-

violâtre, rubané, et coloré par le Manganèse. Ce quartz forme une grande couche, qui traverse un grand banc de serpentine, qui parvient jusqu'au sommet de la montagne.

Dans le voisinage du Col de la Marmotine, Canton de Pian-pra, Vallée de Soana, et contigu à Champourcher, j'ai rencontré des hornblendes noires, mélées avec de l'épidote vert-jaunâtre en masse; de petites tourmalines noires dans un schiste talqueux vert, et grisâtre, et des rayonnantes asbestiformes vertes-foncées. Toutes ces pierres sont en masse et roulées.

Etant parvenu sur la sommité du Col de la Fenêtre, Commune de Cogne, d'épais nuages, qui étaient amoncélés dans l'atmosphère, s'étant heureusement dissipés, j'ai joui avec beaucoup de satisfaction, de la vüe pittoresque, ravissante, et inattendue du Pic de Cogne, qui avec sa pointe aigüe semble menacer, et toucher la voûte des cieux: de cette distance ne paraîssant même plus un objet terrestre.

Du chemin de Cogne à Aoste, on a aussi une belle perspective de cette énorme montagne.

Le Pic de Cogne est de forme pyramidale, quadrilatère. Il sépare la Vallée de Cogne de celle de Grisanche. Il est environné de grands, et rapides glaciers. Cette montagne paraît aussi élevée que le Mont-Cervin.

Les Géologues et les Physiciens doivent sincèrement

regretter que le célèbre de Saussure n'ait pas été à la portée de mesurer le Pic de Cogne, et y répéter des expériences analogues, et comparatives à celles, qu'il a faites au pied du Mont-Cervin.

Les Vallons de Valeille, et Valonté à Cogne, qui qui sont des branches de la fameuse Cocagne sont remarquables par la diversité, et l'abondance de leurs métaux.

M.r de Robilant dans son essai de minéralogie, parle d'une pyrite arsénicale-aurifère de Valeille, qu'il a analysée; mais autrement ces lieux sont à peine connus dans l'Histoire minéralogique du Piémont.

J'ai rapporté plusieurs matières métalliques de ces deux endroits, qui seront l'objet d'un mémoire particulier.

M.r Perotti a trouvé l'année dernière au Lac de la Mionda, Vallée de Soana confinant avec celle de Chiusella; un cristal de Titane-ruthile de Brongniart, ou Titane oxidé de M.r Haüy, superficiellement gris-blanchâtre, et doué d'une espèce d'éclat métallique, mais qui est internement brun-rougeâtre, en prisme hexaèdre à pans inégaux, tronqué aux deux extrémités, fortement strié dans toute sa longueur. Ce superbe cristal a plus de deux pouces de long.

On y aperçoit des espèces d'emboîtemens circulaires, qui le font paraître comme un peu plié aux endroits, où ces lignes forment des divisions assez articulées: ce qui lui donne des traits de ressemblance

avec le Titane oxidé géniculé d'Haüy (planche 74, fig. 219, 220, 221, vol. IV., pag. 299).

Ce Titane traverse par ces deux bouts un quartz blanc translucide, et contenant des parcelles de mica blanc brillant.

Ce lieu a aussi fourni un autre petit cristal de cette classe, terminé à son sommet par de petites facettes pentagonales aussi dans le quartz; ainsi que du Titane brun-rougeâtre, communément irrégulier, et presqu'informe, quelquefois lamelleux, et offrant des fragmens prismatiques mal configurés, ayant pour gangue une pierre magnésienne micacée verte, et du quartz, qui parfois contient de très-petits grenats rougeâtres.

Ces Titanes ont tous les caractères généraux qui appartiennent à cette espèce métallique, et ils se trouvent tant en place, que roulés.

Il a aussi découvert au même endroit la Grammatite d'Haüy, en petits prismes hexaèdres, fort peu discernables, à faces inégales, blancs-verdâtres, striés par leur longeur, très-peu translucides, ayant pour gangue une pierre calcaire blanche grenue et micacée.

Il m'a aussi assuré, que les alentours du lac de la Mionda, fournissent de belles roches fort variées dans leur composition.

Pendant mon séjour a Brozzo, ayant visité les galleries de fer micacé, j'ai trouvé dans celle nommée Taddera, de la Baryte sulfatée blanche et roussâtre, assez transparente, lamelleuse, et en cristaux tabuli-

formes, et autres bien distincts, qui forment des amas fort volumineux, très-intéressans.

Je possède un grand morceau de cette Baryte sulfatée, qui pèse environ vingt-six livres, composé d'une immensité de très-petites tables octogones roussâtres, posées sur la même substance, qui dans des endroits est lamelleuse, et dans d'autres offre des cristaux plus grands, en tables héxagonales.

On observe aussi sur cette baryte des lentilles de braunspath brunes-noirâtres.

J'attends encore de Brozzo beaucoup d'échantillons de cette pierre, qui sont fort bien cristallisés, et unis avec d'autres minéraux. Alors j'aurai aussi la satisfaction d'en déposer de belles pièces à l'Académie.

Près de Vidré, Vallée de Brozzo, parmi les pierres roulées par la Chiusella, j'ai rencontré en 1807, et j'ai revu cette année, un grand bloc de granit composé de quartz blanc-sale, de feldspath blanc-grenu, de lames de mica blanc, et de talc-stéatiteux vert, renfermant des cristaux d'éméraude blanc-verdâtres ou bleuâtres, opaques, en prismes hexaèdres, engagés dans leur gangue: ce qui empêche de pouvoir bien les observer.

Comme cependant ces cristaux doivent fixer toute notre attention tant pour leur rareté, que pour leur nouveauté en Piémont, je ne manquerai pas de me rendre l'année prochaine sur les lieux pour en chercher le gissement, et en donner successivement une exacte description.

Je me borne à observer, que leur texture est lamelleuse, qu'ils sont souvent de la longueur de 8 à 9 pouces, qu'ils donnent du feu sous le choc du briquet, et qu'ils ont du rapport avec ceux d'éméraude, trouvés par M.r le Liévre, auprès de Barat, Commune de Bessines, à quelques lieues au nord de Limoges.

Je me réserve dans peu de temps, de présenter à l'Académie différentes observations sur plusieurs substances pierreuses, et métalliques totalement nouvelles dans le pays.

MÉMOIRE

SUR

LE POISON DU LAURIER-CERISE.

PAR

JOSEPH LAVINY.

Lu dans la Séance du 14 Décembre 1812.

---

§. I.

INTRODUCTION.

Un arbrisseau, qui croît spontanément près de la mer noire, et ailleurs; qui de Trébisonde apporté en Europe en 1576 a été considérablement répandu en Piémont: ce joli arbrisseau qui placé sur les bords des massifs produit un bel effet; qui croît à l'ombre sous les égouts des arbres; qui sert à masquer des objets désagréables; et qui enfin est également utile chez-nous pour garantir bien d'autres plantes des efforts des vents, et peut aussi leur servir d'abri en hiver; cet arbrisseau (le Laurier-Cerise, *Prunus Lauro Cerasus* de LINNÉ) est d'autre part vraiment digne d'être repoussé aussi loin que

possible. En employant son huile essentielle on obtient, dit FONTANA, tous les résultats que présente le vénin de la vipère, et le suc perfide, que les Americains appellent poison *ticunas*; elle est d'autant plus redoutable cette huile en Italie, et notamment dans notre contrée subalpine, qu'encore aujourd'hui on l'y vend quelquefois publiquement sous le titre d'essence d'amandes amères, ou de fleurs de pêcher, et on en met dans le lait et les ragoûts; aussi Léopold grand Duc de Toscane en avait-il défendu la fabrication, et la vente.

Outre l'illustre FONTANA précité, DUHAMEL, MADDEN, BAYLIES, MORTIMER, INGENOUSZ, NICHOLS, LANGRISH, VATER, RATTRAY et autres Savans également respectables se sont occupés de cet important objet; je n'ose pas moins avancer que les recherches chimiques, qui le concernent, n'ont pas encore été poussées assez loin; c'est pourquoi je m'y suis livré avec autant moins d'hésitation que j'en ai été sollicité par un illustre Membre de cette Académie; maintenant je vous prie d'en agréer les résultats.

§. II.

Air renfermé dans les feuilles du Laurier-Cerise.

Les feuilles de Laurier-Cerise placées sur une bougie allumée ou sur des charbons rouges petillent et jettent de suite des fusées d'une vapeur aqueuse assez forte pour étein-

dre une chandelle: quelques poignées de ces feuilles, renfermées dans une cloche remplie d'eau pure exposée au soleil, et communiquant au moyen d'un tube de verre recourbé avec l'appareil hydropneumatique, m'y ont offert en peu de temps un gaz semblable à l'air atmosphérique. Le fer sulfaté et la chaux convenablement employée m'ont convaincu que l'eau de la cloche n'etait ni oxigénée, ni impregnée d'acide carbonique.

M.r GIOBERT a observé dans la montagne de Turin un joli treillage, où l'on fait des parties au jeu en été, et où personne n'a jamais éprouvé aucune incommodité.

Cette dernière observation de la part d'un aussi grand Chimiste coïncide parfaitement avec la suivante.

Lorsque je donnais cours à la plupart des expériences renfermées dans ce Mémoire, j'ai eu plusieurs fois occasion de rester long-tems ferme, de jouer, de manger, et même de dormir sous un beau treillage de Laurier-Cerise sur la colline de Turin, appartenant à M.r l'architecte Ceroni; je m'y suis promené bien longtems, et je n'en ai aucunement souffert.

J'ai interrogé les paysans qui étaient habitués à en faire de même à cet égard, tous m'ont unanimément répondu, que ni eux ni les animaux, n'avaient jamais senti le moindre mauvais effet.

Néanmoins, selon M.r GIOBERT, il aurait encore été important d'examiner l'action de ces feuilles sur l'air atmosphérique, en tenant une branche dans une cloche

remplie d'air atmosphérique, et en y introduisant des animaux pour les y faire respirer; l'avis était à suivre, j'ai donc introduit une branche de ce Laurier sous une cloche, j'y ai fait passer à différentes reprises des oiseaux, et des cochons d'Inde; ils y ont respiré pendant une heure sans qu'on y ait renouvellé l'air atmosphérique: Je compte d'en faire autant à l'égard de différens autres animaux, et je m'empresserai de communiquer les résultats de ces expériences à mesure qu'elles auront lieu.

M.r VASSALLI-EANDI fait aussi remarquer qu'il y a des oiseaux qui placent leur nid sur ce laurier; et que la fauvette à tête noire est de ce nombre.

L'infusion aqueuse des mêmes feuilles essayée par l'eau de chaux m'a offert un précipité d'une belle couleur jaune-orange: ce précipité, qui en peu de temps s'est foncé, n'est que très-peu de carbonate de chaux joint à cette matière colorante. Ce carbonate se redissout avec effervescence dans l'acide muriatique.

L'infusion dont il s'agit, n'est point nuisible aux animaux. Des expériences bien constatées appuient cette assertion.

§. III.

Essai sur leur suc.

Un kilogramme de ces feuilles imbibées de six onces d'eau pure, et bien pilée, m'ont donné un suc, qui filtré est d'une couleur rouge-jaunâtre; son odeur est

pareille à celle des amandes amères concassées ; il est amer et pique tant soit peu la langue. Essayé au moyen des réactifs, dont je parlerai au §. IV., il ne m'a présenté aucun indice d'acide prussique. Je n'y ai pas non plus trouvé aucune qualité délétaire par rapport aux animaux. Il rougit sensiblement la teinture de tournesol. La dissolution lunaire y montre l'existence de l'acide muriatique; l'oxalate d'ammoniaque celle de la chaux. Ce suc n'altère que bien peu la gelée animale. Les dissolutions martiales en offrent quelque changement; mais elles n'en sont point noircies.

L'acide muriatique oxigéné occasionne la précipitation d'une substance résineuse, qu'il m'a été aisé de séparer au moyen de la filtration; la liqueur ainsi filtrée a donné un peu de précipité en vertu des dissolutions baritiques. Il est évident que le peu de soufre y a été brûlé par l'acide muriatique oxigéné : Nous verrons au §. VII que le défaut des muriates dans la substance extractive carbonisée, ainsi que la formation de ces sulfates doivent être attribuées à la combustion du soufre.

§. IV.

Matière muqueuse.

La matière restante sur le filtre, dissoute en 50 parties d'eau pure et froide abandonna par la filtration une matière colorante verte. La dissolution n'a pas été

troublée par l'ébullition, elle n'a pas même souffert aucun changement sensible par la dissolution de muriate de mercure suroxidé; mais mise en contact avec l'acétate de plomb, elle a laissé aussitôt paraître des flocons blanchâtres, qui se sont immédiatement précipités, formés par une matière non albumineuse, mais bien muqueuse.

§. V.

Infusion aqueuse de l'épiderme et de la 2.e écorce.

L'infusion aqueuse de l'épiderme, et de la 2.e écorce essayée, de la même manière que les feuilles, m'a offert les mêmes phénomènes; seulement la gelée animale y a été changée en une substance coriace, en vertu du tannin y renfermé.

Le Laurier-Cerise (ainsi que presque toutes les plantes) renferme tant soit peu de fer; l'azote en est aussi un des produits analytiques. Il est vraisemblable que l'altération corruptive des parties de cette plante, et notamment de son écorce, même pendant sa vie favorise le développement de l'azote: mais le bleu du *Bissus phosphorea* que j'ai vu sur la surface de ce Laurier est-il le résultat d'une combinaison faite naturellement du fer avec l'acide prussique formant un prussiate de fer?

§. VI.

Feuilles traitées par la distillation aqueuse.

J'ai partagé en cinq distillations huit kilogrammes de feuilles bien pilées dans un mortier de marbre; j'ai versé 4 kilogrammes d'eau pure sur une de ces parties: La première distillation achevée, j'ai procédé aux cohobations successives: La dernière m'a fourni un kilogramme d'eau très-saturée des principes immédiats de cette plante, dont l'huile volatile que j'ai soigneusement séparée, pesait six octaves.

Cette eau cohobée a une odeur très-forte d'amandes amères concassées: Sa saveur est amère et piquante: Elle rougit la teinture du tournesol, mais les dissolutions de fer, et la gelée animale n'en souffrent aucun changement. Cette eau très-cohobée jouit de quelques propriétés caractéristiques de l'acide prussique; elle précipite en blanc le nitrate d'argent, et celui de mercure neutre en noir gris. Au reste cette eau est fort vénimeuse pour les animaux à sang chaud; elle l'est très-peu pour ceux à sang froid, ainsi que le prouvent les expériences suivantes:

1.° Deux onces de cette eau que j'ai fait avaler à un gros chien, lui ont causé la mort dans le court intervalle d'une heure et demie environ, laquelle a été précédée d'aboyemens extraordinaires, de dyspnée grave,

de jets altérnatifs d'urine, d'une asthénie générale, et de spasmes violens.

2.° Quarante gouttes de cette eau que j'ai fait prendre à un lapin à deux reprises, lui occasionèrent de suite des convulsions horribles, et il expira presque sur-le-champ en jetant des cris affreux.

3.° Une plus forte dose fit pareillement périr, presque dans un clin-d'œil, un autre lapin; ouvert quelques instans après la mort, il m'a offert les vaisseaux sanguins de l'estomac, et notamment ceux du cardia gorgés de sang, et presque phlogosés, des tâches rougeâtres ou livides sur différens points de sa surface interne.

4.° Un autre chien plus vigoureux que le premier a été tué au moyen d'une seule cuillerée de cette eau, une heure après l'avoir avalée; le ventricule, le duodenum, et le cæcum ont été trouvés dans un état de phlogose.

5.° Trente gouttes détruisirent de même immédiatement un petit chien aussitôt né; son estomac manifesta également l'état de phlogose.

6.° Dix gouttes suffirent à un autre lapin pour le réduire à l'état de ceux dont il s'agit dans les N.os 2 et 3. Mais dans ce dernier l'inflammation ne se manifesta pas seulement sur l'estomac, et sur les intestins, mais aussi sur les poumons.

7.° J'ai choisi trois chiens de six jours; un d'entre eux en a avalé une dose, j'en ai injecté la même dose

dans le rectum du second; le ventricule du premier s'est montré phlogosé ; il en a été de même par rapport au second; cependant l'inflammation était plus marquée vers le bout inférieur du rectum; le troisième petit chien, auquel j'avais tranché la tête, a offert la cavité abdominale dans son état naturel.

8.° Ce poison appliqué sur la peau accidentellement, ou expressément excoriée, ou bien inoculé au moyen d'une aiguille ou d'une lancette, etc. a occasioné à-peu-près les mêmes résultats que je viens de rapporter.

9.° Il n'en a pas été de même par rapport aux animaux à sang froid: Il m'a paru que cette eau de quelque manière que je l'aye employée, ne leur a point été nuisible.

10.° J'ai aussi donné de l'huile volatile de girofles, de cannelle, et de menthe poivrée à des chiens, à des châts, et à d'autres animaux; et j'ai vu qu'une forte dose des huiles dont il s'agit, leur a constamment été mortelle; cependant l'huile volatile du Laurier-Cerise m'a toujours paru plus puissante que les autres.

11.° J'ai privé l'eau de Laurier-Cerise de son acide prussique; cette eau dans cet état ne m'a paru nullement vénimeuse.

12.° J'ai redonné à cette eau l'acide prussique, que j'ai tiré du prussiate mercuriel avec la méthode de Scheel, et l'eau a de nouveau déployé son efficacité vénimeuse.

§. VII.

Expérience touchant l'acide prussique contenu dans l'eau.

J'ai dissous une dose de muriate de fer neutre dans une livre d'eau de Laurier-Cerise; j'en ai obtenu un prussiate de fer oxidule (*a*) au moyen d'une suffisante proportion d'eau de chaux; j'ai séparé ce précipité par la filtration; j'ai employé l'acide muriatique délayé pour dissoudre l'oxide y contenu; ensuite j'ai obtenu du précipité restant bien lavé, et bien desséché, 40 grains de prussiate de fer, que j'ai changés en prussiate calcaire moyennant l'eau de chaux (*b*). Le prussiate calcaire, dont il s'agit, était tout-à-fait limpide (*c*). Le résidu bien lavé après la filtration du prussiate calcaire n'était qu'un oxide qui pesait 20 grains, composés selon BUKOLS de 0,13 d'oxigène, et de 73 de fer. L'acide prussique y contenu peut donc s'évaluer à 20 grains pour chaque livre d'eau très-cohobée, et un

(*a*) Le fer dans cette expérience ne quitte pas son dissolvant pour se combiner avec l'acide prussique faiblement contenu dans l'eau très-distillée. Il est nécessaire de porter le salificable du fer sur une base, et le fer ainsi obtenu dans l'état d'oxide, l'acide prussique s'y combine, et forme un prussiate de fer; ce phénomène a pareillement lieu en employant l'acide prussique de Scheel.

(*b*) Il est clair que ce n'était point un précipité mélangé d'une matière colorante analogue à l'indigo.

(*c*) e regarde ce prussiate calcaire, comme le meilleur réactif pour découvrir le fer.

octave d'huile volatile, qui est nécessaire pour la saturation de l'eau, comme on verra au §. IX. Cette liqueur contenant encore son huile essentielle filtrée et distillée pour la priver du muriate calcaire n'a plus donné aucun indice d'acide prussique; c'est alors que ainsi dénuée d'acide, et essayée sur différens quadrupèdes, et quelques oiseaux, cette eau n'a montré aucune propriété vénimeuse.

J'ai dissous du muriate de fer neutre dans l'eau du Laurier-Cerise; j'ai mouillé dans cette dissolution des chiffons d'étoffes diverses, des rubans, et même de la soie crue; je les ai trempés ensuite dans l'eau de chaux; après l'intervalle de quelques minutes, je les ai jetés dans l'eau commune légérement acidulée par l'acide muriatique, ils m'ont immédiatement offert une belle couleur azur du ciel rendu plus élégant au moyen des lavages, et du contact avec la lumière. Je me flatte que cette couleur ainsi obtenue fera faire un pas important dans l'art de la teinture.

Des expériences ultérieures tracées sur les mêmes bases me font aussi espérer d'obtenir l'hydrophane, ou cacholong d'un beau bleu élégant, au lieu de le colorer en azur avec l'acetate de cuivre, et l'acide oxalique.

§. VIII.

Huile volatile.

L'huile volatile du Laurier-Cérise va au fond du vase contenant l'eau distillée ; dans cet état la consistance de cette huile est pareille à celle du baume de Copahau , tirée de l'eau , elle devient fluide et transparente ; elle est rougeâtre ; son odeur est fort au point d'occasioner des maux de tête ; elle est amère , et pique à l'instar des substances légèrement caustiques ; mélangée avec l'eau distillée plusieurs fois, elle stimule tellement les parties excoriées, qu'elles s'enflamment presqu'à l'instant.

§. IX.

Expériences relatives.

Une drachme de cette huile s'est complétement dissoute dans une livre d'eau pure à quatre-vingt degrés de l'échelle rhéaumurienne. L'eau renfermant cette huile distillée plusieurs fois ne m'a donné aucun indice d'acide prussique (*a*).

Cette essence agitée pendant un tems considérable,

(*a*) J'ai donné cours aux expériences suivantes d'après le conseil de M. Giobert.

et réitérément distillée sur l'eau de chaux, a fini par manifester des caractères semblables à ceux de l'eau très-cohobée; mais l'acide prussique s'y est trouvé en moindre proportion : Il est donc évident que les principes immédiats existent dans l'huile volatile, dont il s'agit, et qu'en vertu des distillations répétées ils se combinent pour former cet acide.

L'ammoniaque forme avec cette essence un saponule qui se dissout dans l'eau sans offrir la moindre trace de prussiate ammoniacal.

J'ai jeté cette essence avec de la potasse pure dans un cylindre de grès de capacité telle à renfermer un peu d'air atmosphérique, et les jointures bien lutées, je l'ai exposé à une haute température pendant une demi-heure; cette matière lixiviée à chaud il s'en dégagea une odeur très-forte d'ammoniaque, mais aucune formation d'acide prussique ne s'y effectua; il ne me réussit point d'opérer la combinaison de cet acide avec aucune base alkaline, ou terreuse.

L'acide nitreux versé sur cette essence, elle fut à l'instant portée à l'aide d'un peu d'acide sulphurique, à l'état d'une résine, dont la consistance égalait celle de la cire; elle paraissait se cristalliser : l'ayant bien lavée dans dans le but de la priver de tout acide, j'en ai obtenu un caustique violent, qui appliqué à la peau, excite des douleurs violentes.

§. X.

Substance extractive tirée des feuilles.

Une livre de feuilles m'a donné environ une once d'extrait; sa couleur est rouge noirâtre; il a la consistance de la thérébentine, il est amer, astringent: cet extrait excite facilement et considérablement le vomissement aux chiens, mais il ne m'a point paru déployer une puissance vraiment vénimeuse. Il se dissout en partie dans l'alcohol; cette dissolution dans l'eau se précipite en flocons blanchâtres. Cet extrait gomme-résineux bien desséché, et traité à un feu violent avec égale proportion de potasse, pendant la lixiviation, produit aussi beaucoup d'ammoniaque sans pourtant donner des prussiates.

La partie carbonisée a été réduite environ à un quart de son poids; elle a développé une quantité considérable d'acide carbonique traitée avec de l'acide nitrique bien pur, alors les dissolutions lunaires ne m'ont plus fait apercevoir aucun muriate: les dissolutions baritiques ont dévoilé des sulfates; les prussiates alkalins ne m'y ont annoncé que bien peu de fer. L'oxalate ammoniacal a précipité la chaux; ayant séparé cette dernière, et traité le résidu par les réactifs convenables; j'ai obtenu quelque molécule d'alumine et de magnésie, que j'ai séparée au moyen de la potasse carbonatée par excès. Je n'ai plus trouvé de

la magnésie dans l'extrait tiré du Laurier-Cerise qui avait végété dans une autre région.

§. XI.

Fleurs ; Distillation : Cohobation.

Les fleurs cohobées avec de l'eau m'ont donné une eau aromatique analogue à celle des fleurs de pêcher sans huile volatile; les distillations quoique réitérées ne m'ont point donné d'acide prussique; cette eau différemment traitée avec des réactifs divers ne m'a pas offert des résultats dignes d'être plus particulièrement remarqués.

§. XII.

Drupes.

Les fruits de cette plante non mûrs, et même fort-aigres avalés par différens animaux les ont purgés à l'instar des drastiques.

Les demi-mûrs, ainsique les mûrs, mangés par des enfans ne leur ont causé aucun mauvais effet du moins sensible.

La pulpe de ces fruits parvenus à sa maturité est douceâtre, tant soit peut astringente; elle s'approche un peu de celle des prunaux.

Le suc de cette pulpe a un arome léger, ressemblant aussi à celui des amandes amères concassées; privé de quelqu'acide végétal moyennant le carbonate calcaire, il m'a donné une liqueur siropeuse fort-épaisse, désagréable, qui passe en trés-peu de tems à la fermentation vineuse (*a*) : cette liqueur fermentée me donna à la distillation un alcohol analogue à celui des cerises noires. La lie restante carbonisée m'a aussi donné de l'ammoniaque.

§. XIII.

Cotiledons.

Les Cotiledons sont couverts d'une écorce très-mince; j'en ai exprimé une huile, qui m'a paru innocente, comme l'est celle des amandes amères. Le résidu distillé plusieurs fois dans l'eau m'a offert de l'acide prussique, qui a aussi exercé sa puissance vénimeuse sur les poules.

(*a*) L'excitateur de cette fermentation si accélérée est sans doute la quantité abondante du mucilage etc. y contenu.

§. XIV.

Racine.

Mes recherches analytiques touchant la racine, et la substance ligneuse de la plante, dont il s'agit, ne m'ont offert aucun résultat digne d'une attention particulière.

§. XV.

Galvanisme employé à l'effet de reconnaître l'état d'oxidation du fer dans le prussiate.

Ce n'est que dans le but de reconnaître le véritable état d'oxidation du fer, dont il a été question au §. VII., que j'ai procédé aux expériences suivantes.

J'ai mis en contact des conducteurs d'une pile voltaïque de 45 doubles disques une dose d'huile volatile de Laurier-Cerise ; nul effet sensible.

J'ai mouillé les cartons dans de l'eau très-distillée, puis j'ai fait passer les conducteurs dans un tube renfermant du fer en dissolution, l'action galvanique n'a pas manifesté le moindre indice de prussiate de fer.

J'ai mêlé une dissolution de fer au *minimum* dans l'eau susénoncée, de suite j'ai appliqué les conducteurs à l'appareil; l'eau s'est décomposée; le fer a absorbé

une nouvelle portion d'oxigène, et l'acide prussique devenu libre a formé un beau bleu de prusse; ce qui prouve que le fer y est dans un état d'oxidation intermédiaire.

§. XVI.

Conclusion.

Il me paraît que les expériences que je viens d'exposer m'autorisent à conclure :

1.° Que la puissance délétère de l'eau cohobée du Laurier-Cerise dépend de l'acide prussique qu'elle renferme.

2.° Que cet acide n'existant point dans les feuilles, il a été formé en vertu des distillations réitérées.

3.° Que l'huile volatile a fourni en partie les matériaux pour le composer.

4.° Que mes recherches analytiques concernant les substances végéto-animales, extractives, et autres, dont il a été question aux paragraphes VI. et X. me laissent entrevoir que l'azote se combine par force de cohésion avec les autres radicaux pour former ce violent poison (*a*).

(*a*) L'azote nécessairement associé à l'acide carbonique dans l'atmosphère se sépare ensuite dans le végétal.

Nous avons vu plus haut que les différentes huiles volatiles ne sont délétères qu'à une dose bien plus forte, que celle de l'huile du Laurier-Cerise, est-ce que la plus grande efficacité de cette dernière est dépendante d'une plus-forte proportion d'azote ? Je tacherai de résoudre ce problème au moyen des nouvelles expériences que je compte d'entreprendre.

SPECIMEN
DE MOTU CEREBRI.

AUCTORE FRANCISCO RAVINA.

Exhibitum die 2 Febr. 1811.

Satius est nova velut membra peracto corpori intexere, nec tamen priora turbare . . . . PLIN.

IN numerosissima animantum familia, quæ gerunt ubera, duplici motu cerebrum agitari inconcussa res est, experimentis evicta. Confuse quidem, sed duplicem in cerebro motum asseruit GALENUS, qui omnium primus disputavit de re eousque haud cognita. Post GALENI tempora physiologi non obscuri nominis uni dumtaxat motui cerebrum subiici scripserunt, dum alii duplicem tuebantur, et in varias itidem abiere sententias circa causam phænomenorum. Per septemdecim sæculorum intervallum sub versatili opinionum influxu agitata lis est, donec superiori sæculo SCHLICTING motus

cerebri apprime distinxit, probavitque cerebrum in expiratione sursum attolli, deprimi vero inspirationis tempore; LORRY deinde, WALSTORF, HALLERUS, LAMURE longa, et sœpius iterata experimentorum caterva veritatem agnovere coacti — Supervacaneum videri posset agere de re ab eximiis viris luculentissime confirmata; cum tamen a recepta universim opinione nuperi quidam recedant, litem, quæ suspensos et dubios physiologorum animos iterum tenet, recolere, non absonum duxi. Rem porro novis tentaminibus subieci in pluribus quadrupedibus calidi sanguinis, quorum cerebra denudavi, in felibus septem, viverra, in agnis duobus et hœdo, in asino, equo, in vitulis quatuor, in lepore timido, et cuniculis pluribus, in vulpe, in lutra, in tenera scrofa, in mure domestico majori, mure vulgari, mure agrario, mure avellanarum majori, sed præcipue in canibus, quorum viginti et ultra perforavi; in incisis hisce animantibus duplici motu cerebrum gaudere perspexi. Ex omnibus autem experimentis, quæ hac super re instituta fuerunt in dictis animantum generibus, concludi jam poterit sat certa analogia, duplicem motum cerebri in omnibus quadrupedibus viviparis fieri, partium viscerumque etiam in iis omnibus similitudine spectata — Ex vasorum structura, et ex modo, quo respiratio absolvitur in hominibus, divinari etiam poterit horum motuum existentia. Motus cerebri in capitis vulneribus ab antiquis quibusdam auctoribus animadversi equidem fue-

runt, ex iisdem tamen nemo motuum, qui a respiratione certo proveniunt, satis compertum habuit discrimen. Anno 1810, die 13 maii, infelix eventus hanc me veritatem edocuit. Dum saltus *Montis Noctuli* peragrarem, contigit, ut sus scrofa dilaceraret infantis bimestris cranium, ita ut sauciato osse frontali cum parietalibus, vertice cranii penitus avulso, una cum dura meninge, cerebrum per maximam superficiem in conspectum veniret. Ejulatibus admonitus ad horrendum spectaculum veni, et tunc vidi cerebrum non solum moveri ex arteriarum diastole, quarum manifestiores pulsationes secus majorum ramorum decursum conspici identidem poterant, verum etiam vidi in ea vagituum perturbatione cerebrum in quavis expiratione manifesto turgescere, et sursum trudi, atque in inspirationibus singulis deorsum, quod idem vidi post aliquod temporis, cum, vel dolore sopito, vel viribus haustis, quiesceret infans.

Eodem hoc anno 1810, die 13 julii, vocabar ad ægrotum in finibus Sanctæ Juliæ degentem prope torrentem Uzzone., qui ex arbore altissima præceps dederat. Ex mortali hoc lapsu ingens vulnus ingentiori fractura comitatum accepit in vertice capitis aliquanto sinisterius cum ossium intropressione. Undecima erat a lapsu dies, qua ad ægrotum me contuli una cum duobus Chirurgis artis suæ satis peritis. Pars capitis male affecta suppuratum conceperat, et ambæ cranii laminæ putredine, et carie tentabantur, sub qui-

bus ingens saniei vis stagnabat. Nutantium ossium fragmenta ablata fuere, quæ ad membranas usque penetrabant; et superficies cerebri in conspectum veniebat per vulnus irregulare duorum pollicum diametro non minus. Dum in nudatam cerebri superficiem oculos figeremus, hoc viscus revera vidimus motu moveri cum respiratione alterno. Jubebam, ut respirationem cohiberet ægrotans, et cerebrum protinus quiescebat a motu; ut crebro spiritu animam duceret, et tunc citatiori motu, pro respirationis velocitate, cerebrum movebatur. Post diu retentum spiritum in maximis, longioribusque inspirationibus cerebrum profundiori loco demergi semel, et iterum vidimus, et in validissima expiratione, plus sursum ascendisse.

Duplici ergo motu gaudet cerebrum etiam in homine; et jam licet in horum motuum causas inquirere. De motu arterioso primum dicam. Coiter, in agnis, hædis, et canibus viventibus captis experimentis, cerebrum nullibi moveri autumavit; arterias dumtaxat ejusdem visceris se attollere docuit, non cerebrum. Quin et notavit Valleus in iis, qui vulnerato usque ad cerebrum capite extremos spiritus trahunt, quasdam conspicuas arterias, non cerebri substantiam moveri. Quod ipse viderim, sincerus referam: universam cerebri molem ab arteriarum diastole generatim elevatam vidi, et plus quidem minusve, spectaculo miro, pro variis adjunctis: at arterias perinde alternis salire vi-

cibus per cerebri superficiem, perque piam, perque duram meningem serpentes modo se attollere, modo vicissim subsidere vidi etiam eo tempore, quo tota moles cerebri ab arteriarum diastole sursum attollebatur: phænomenon pluries vidi in dura meninge, in superficie cerebri, in fissura SYLVII, et in interiori etiam cerebri substantia; et arterias quasdam micare observavi, cum jam, viribus deficientibus, quiesceret cerebrum, et arterias callosas seorsim pulsare ad latera *raphe* semper vidi, quoties ad illas pervenit oculorum testimonium.

Ad duram meningem hunc motum nonnulli retulerunt, cerebrum moveri inficiati: ita pulsationibus arteriarum, quæ supra duram meningem serpunt, hunc motum tribuere maluerunt FALLOPIUS, BAUHINUS, aliique. Sed dura meninge revulsa, cerebrum adhuc gaudet hoc motu. E contra hanc membranam a propriis arteriis, in motum non agi, a quibus eadem agitatur, voluit LORRY; ingeniose observans arterias ventriculi, intestinorum, vesicæ ne minimum quidem in eorumdem parietes motum inducere, licet et magnitudine, et numero arterias meningeas adæquent. Verumtamen ventriculi, aliarumque partium arteriæ ex distensione pulsant: vidi namque, aperto abdomine viventis adhuc vituli sæva gastritide affecti, ventriculos enormi volumine turgidos, enormis itidem duritiei, inflammatione correptos insigniter rubentes, et vasa arteriosa in parietibus mirifici hujus organi

crebris, iisdemque admodum conspicuis oscillationibus agitari, et ventriculorum inflammatos parietes horum motuum participes: tumores fungosi cerebri pulsationes ostendunt cum arteriarum pulsu consentientes ex Louis; et in cerebri fungo validam arteriarum pulsationem memorat Wanswieten, ut tota ejusdem moles subsilire videretur.

Durum cerebri involucrum, cranio integro, sane moveri nequit: verum cum magnis, numerosisque arteriis donetur hæc membrana, super omnem superficiem hemisphæriorum cerebri extensa, oscillationibus concipiendis tunc idonea erit censenda, cum a vinculis fuerit liberata, quibus cranio firmiter vinciebatur. Ut de re certior fierem, die 7 augusti anni 1810, canem trimestrem grandioris prosapiæ terebravi in vertice capitis sinistrorsum, et circa oram foraminis abscidi duram meningem: hisce peractis perforavi cranium in parte dextra, et summa quidem diligentia, ne dura meninx e sedibus dimoveretur suis. Dura meninx per hoc foramen in conspectum veniebat cum arteriarum ramis satis conspicuis, qui evidenti motu donabantur; tunc subtilem laminam corneam per foramen sinistri lateris induxi eo fine, ut deorsum truderem cerebrum subtus foramen oppositum: at in illa cerebri depressione motus arteriosi in dura meninge indesinenter apparuere.

Quamobrem cum cranii parietes nondum osseam duritiem sunt adepti in fonte pulsatili, vel hisce in spa-

tiis, in quibus ossa cranii destructa fuerint, et in quibus, deperditæ osseæ loco, flexili reparata fuit, et apta cedere substantia, pulsatio, quæ tangitur ab arteriis duræ meningis provenire censenda. Ad fontem bregmatis quod attinet, arteriæ, quæ ibidem veniunt ex præcipuo ramo sunt arteriæ meningeæ: præterea in media membrana cranii in os convertenda, uti optime adnotarunt Ruyschius, et Vicq d'Azyr, arteria invenitur reliquis major, quam ad promptiorem hujus loci in os mutationem conferre autumat Vicq d'Azyr: ad ejusdem fontis pulsationem hæc arteria contribuere posse, videtur. Ergo crassam meningem a cerebro tantum moveri existimet nemo. In fonte vero pulsatili ab arteriis duræ meningis ibi crassioribus, et ab arteriis membranæ in osseam naturam transituræ motum, qui primis a nativitate mensibus conspicitur, unice provenire censerem; quamvis sub expirationem infantis, motus cerebri arteriosus huc forsitan valeat symbolam suam quadantenus conferre. Cum pluries hunc motum spectaverim in infantibus, semper arteriarum pulsationibus eundem respondere vidi, quin unquam viderim elevationem, aut depressionem respirationis motibus apprime respondentem. Cum tamen posuissem digitum super fontem pulsatilem infantis trigintaquinque dies nati, lenem arteriarum pulsationem percipiebam, sed quando vagiret infans, obscuras insuper percipiebam mutationes sub digitis tangentibus, et in prælongis ejulatibus irregularem turgorem, dicerem etiam

obscurum fremitum a turgescente cerebro manifesto prognatum, quin tamen ab indesinenti motu cessaret arteriarum pulsatio.

Arteriosus cerebri motus vel in materno utero in fœtu quidem peragitur, et istum ad fontem bregmatis percipi docent artis obstetriciæ periti: at cum primo respirat infans, alter motuum ordo in cerebro nascitur, qui a respiratione certo provenit. Hunc motum a respiratione pendere confirmat elegantissimum, jam aliis de finibus ab Hookio institutum experimentum, quod in pecuario cane repetii, cui cranium terebraveram. Dum enim pulmones, aperto pectore, et immisso assidue aere per tracheam, constanter inflarem, in constanti hac, et diuturna pulmonum expansione, animalis vita diutissime quidem sustentabatur, sed cerebrum nullam obtulit, per terebrati antea cranii foramen, vel levissimam mutationem respirationi analogam mihi attentissime spectanti, licet ante experimentum in conspectum evidenter veniret motus, de quo nunc sermo. Eadem res accidit ligata valide trachea, vel naribus, et ore rite obturatis.

Ut experirer, an ab aeris pressione, et gravitate, propter sublatum æquilibrium inter aerem externum cerebri nudatæ superficiei incumbentem, et aerem in vastissimis narium anfractibus rarescentem in motum adduceretur nobilissimum viscus, cerebrum animantis, in quo motus hujusmodi jam conspexeram, ab aeris contactu removere studui. Osseis cranii parietibus ca-

nis molossi vix quadrimestris amplo satis foramine terebratis, peracti vulneris oræ ligneum cylindrum intus cavum apprime fabrefactum accommodavi. Ejusdem cylindri operculum, interiori margine in spiram contortum, pro lubitu poteram dimovere. Illius autem oræ superiori sericum velum, gummi elastico superinductum, firmiter glutinando prætendebam. Inferiorem cylindri extremitatem cum capite plures appositæ, superinductæque fasciæ firmabant, quarum aliquæ cera, oleo et therebinthina ita imbuebantur, ut aditus aeri certo præcluderetur. Firmato itaque hocce apparatu, super cerebrum demisi exilem suberis laminam, cui, verticali directione, parvam, eamque cylindricam medullam sambuci agglutinaveram ejus altitudinis, ut in cerebri elevatione summam cylindri altitudinem pertingeret. Cylindro postea clauso operculo suo, ad experimenti eventum animum converti: at vero non sine admiratione, et animi voluptate non exigua, intueri licuit in quavis expiratione animantis sericum velum percuti; et digitus ipse superimpositus ab exigua sambuci columna leniter percutiebatur. Si nares canis obturarem, protinus cessabat serici lacunaris alterna vibratio; sed si difficilem tantum fecissem aeris per nares ingressum, longior, et validior, et profundior fiebat inspiratio, et fortiori dein vi cum expiraret animal, fortiori etiam vi, et impetu in tremorem adducebatur sericum lacunar.

In aliis canibus experimentum repetere placuit, et

idem semper fuit eventus. Utebar alias vitro convexo exigui horologii, cum memorato cylindro superius apprime connexo, et tunc oculis intueri etiam licuit cerebrum turgescere in expiratione animantis, detumescere dein sub inspirationis stadio, deprimi, et inferius revera descendere; sed purissimum vitrum, qua parte cerebro erat obversum, vapore, qui de superficie cerebri perspirabat, brevi tempore obducebatur. Intra cavum cylindri aerem non admitti certior eram factus; cum etenim valide insufflarem per ferream exiguam fistulam, cylindro rite connexam, et sub experimentis affabre clausam, nullibi animadvertere potui aerem egredi, nec circa cylindri cum capite commissuram, nec alibi. Quamobrem in cerebro nudato atmosphera superincumbens non erit assignanda pro causa motuum memoratorum. Exigua nimium sunt foramina in inferiori cranio insculpta, eaque firmiter dura meninge obturata, vasis, nervisque repleta, qui, extimæ membranæ nexu firmissimo in eorumdem egressu a cavea cranii, calvariæ revinciuntur; et substantia cerebri valde crassa est, et sibi continua ad invicem sustinetur, et convexa ejusdem superficies apta quammaxime est pressioni sustinendæ. Quare cum, obturatis naribus, ore dumtaxat spiritum duceret animal, cerebrum non intermittebat a motu, tunc tamen a pulmonibus ad basim cranii per nares interclusa via aeri est.

At neque aeri subter basim cranii rarefacto in inspirationis stadio tribuendum esse, ut cerebrum in se

ipsum concidat, sequenti constabit experimento. Exigui canis melitensis, cujus cranium, dum viveret, perterebraveram, et in quo motus, de quibus nunc agimus, observaveram, collum in ima parte resecui, qua cum thorace conjungitur; deinde capiti cum collo appensam tracheam supra lancem machinæ pneumaticæ ita apposui, ut in cavo suo reciperet tubum supra lancem prominentem. Cum metallico tubo tracheam apprime conforraminavi, atque aerem deinde educebam; at nullum, ne minimum quidem, motum in cerebro hujus animantis perspexi, licet quavis emboli agitatione per os et nares ingrederetur aer, et majori quidem celeritate, quam cum respiraret animal. Nares hujus canis, et oris hiatum per omnem illius ambitum perstringebam, apposito fasciarum apparatu, omnem omnino aeri exteriori aditum prohibente: aerem tunc denuo iteratis haustibus exantlabam, et vacuum in anthlia cum appensa trachea, in oris interna cavea, et in narium anfractibus, intimioribusque recessibus, quantum fieri licuit exactissimum, parabam, atmospheræ vim, si quæ foret, profecto manifestaturum; verum ne tunc quidem cerebri superficiem deorsum trudi, aut volumine minui, aut aliam quamlibet experiri mutationem, licuit intueri.

At vero, dum valida vi expellitur a pulmonibus aer, tunc cerebrum valdopere turget: poteritne hoc viscus sursum impelli ab impetu, quem exerceat aer in basi ejusdem? Omne dubium removet, quod peregi expe-

rimentum. Remoto ab apparatu pneumatico capite canis, de quo nuper verba feci, in ejusdem tracheam immisi siphonem, cujus ope aer in folle lusorio comprimitur, et inde iterata pressura in resectam canis tracheam aerem conjiciebam, et, qua majori poteram, vi condensabam; sed ne tunc quidem cerebri substantia e sedibus fuit dimota suis, et nullam prorsus, quæ sensibus potuerit percipi, mutationem obtulit. Ex hisce experimentis certum ratumque apparet, atmospheram, nullam exterius interiusve exercere vim posse, qua illud cieatur in motum.

HALLERUS, et Auctores, qui hac de re scripserunt, ferme omnes credidere cerebrum, dum movetur motu respirationi alterno, ultra consueta et propria confinia ascendere: hunc motum idcirco non admittunt posse fieri, nisi cum cranii cavea fuerit referata. Sed quorsum hæc? Volumen cerebri, quo cranium perfecte repleat, nonne poterit minui volumine, si qualibet de causa ex eodem subtrahas contentos liquores, qui una cum solida substantia idem viscus in illo, quo gaudet volumine, constituunt? Cadaverum extispicia, animantia diuturna inedia confecta, vel hemorrhagia enecata hanc veritatem semel atque iterum commonstrarunt. Intacto cranio cerebrum ab illo statu, quo omnino calvariam repleat, ad volumen aliquantisper minus transire posse, quid vetat eo tempusculo, quo venæ ejusdem visceris sanguine deplentur? Ex nuperioribus eximius TOMMASINI, quo pollet ingenii acumine, cerebri elationem

expirationi synchronam ex coacta distensione, quam unda sanguinis efficiat non prorsus oriri, in suspicionem jam pridem venerat. Hos motus, quibus cerebrum deorsum truditur, produci ex ejusdem visceris inanitione vasorum, maluit opinari, ut, dum expirat animal, superior cerebri superficies in pristinum locum redeat.

In eandem opinionem ego veneram, cerebrum nimirum deprimi sub inspiratione, et minui volumine infra propria confinia, dum sub expiratione rediret in pristinum, cum ab atmospheræ pressione hunc motum provenire suspicabar; neque ab eadem opinione recessi, cum ratiunculas meas silere jussit fida observatio; certa enim mihi suppetunt experimenta hac super re, quæ, data opera, primus suscepi. Quæ autem pericula institui, dum probant cerebrum ab ea altitudine revera descendere, qua cranium repleat, sub inspiratione, rem contingere, etiam intacto cranio, præterea evincunt. Hoc enim vidi perpetuum in omnibus animantibus mammiferis, quæ perforavi viventia, cerebrum mole revera minui, a fornice cranii recedere, nec ejusdem caveam amplius replere, cum illud subsidet in inspiratione; cum vero expiraret animal, cerebrum ad fornicem cranii redire semper vidi. In grandiori cane, cui cranium terebraveram, calamum scriptorium poteram facili negotio interponere inter superficiem cerebri superiorem, et fornicem cranii qualibet inspiratione. Sed alia præterea supersunt experimenta, quæ rem evincunt: in ve-

natico cane ob exiguam incisionem, quam in ejus cranio peregeram, intacta et immobilis prorsus fuit, et immunis a motibus cerebri dura meninx. Cum in eadem perexiguum foramen efficerem vix conspiciendum, ex foramine, pulchra res visu, sanguis ibat, et redibat pro respirationis vicissitudinibus: per duræ matris, in hoc experimento prorsus immobilis, vulnus sub inspiratione sanguis evanescebat, et in expiratione vicissim super hanc membranam in conspectum veniebat sanguis, qui e sinu falcis, data opera, sauciato effundebatur super cerebrum. Momentum dimensurus motus cerebri, qui respirationi respondet, usus sum ligneo cylindro superius memorato. Operculo remoto, cylindrum apposui, et firmavi ad oram vulneris, quod in cranio molossi canis institueram. Ex ferro duo parva fila cylindrum tunc secabant in ora ejusdem superiori, ad invicem ita dimota, ut per ipsa columna ex medulla sambuci parata lineæ unius diametri moveri commode posset. Juxta columnam, quæ supra memorata fila aliquantisper prominebat, chartam agglutinaveram in plures lineas apprime divisam. Hæc columna exili suberis lamina, verticali directione, insistens dimittebatur supra superficiem cerebri, ut per media fila prædicta transiret: tunc rite obturatis naribus, et ore perforati canis, post absolutam expirationem, eo tempore, quo cerebrum pertingebat ad fornicem cranii, signabam cui ex lineis in columna descriptis responderent fila ferrea, et facta deinde facultate animanti, ut duceret

animam, vidi sub consuetis inspirationibus ad lineam et ultra columnam descendere inter memorata fila. In validioribus, longioribusque inspirationibus, cum usque ad finem eorundem minueretur volumine cerebrum, ad tres lineas columnam descendere, quandoque conspexi. Eo enim profundius demergitur cerebrum, quo validior est inspiratio; hinc cum aspera arteria ligata solvitur, vel nares diu clausæ reserantur, in profundiorem locum venit superna cerebri superficies, cum primum ad munia sua redeunt pulmones.

Omnem præterea dubietatem tollunt experimenta, quæ institui, quibus suspiceris cerebrum sub inspiratione solum descendere ab ea altitudine, quæ ultra internam cranii laminam promineret. Majori, qua fieri potuit, diligentia perforavi cranium canis maximæ molis quidem, sed junioris adhuc ætatis. Quod abscidi rotundissimum osseum ex cranio circulum, rotundo foramine terebravi, atque huic foramini tubum vitreum diametri lineæ unius ferruminavi, in parvum infundibulum superius desinentem. Dura meninge circa vulneris oram summa manu diligentissime resecta, ne superstes divelleretur ab adæsionibus suis, circulum osseum denuo aptavi propria in sede, ibique firmissimis ligamentis retinebatur. Hisce peractis, eo momento, quo cerebrum mehercule pertingebat fornicem cranii, nimirum sub finem expirationis, obturabam nares canis (per os spiritum trahere nequibat ob appositum fasciarum apparatum), dein tubum vitreum aqua replebam. Facta

tunc animanti facultate, ut duceret animam, aqua omnis ex tubo evanuit, et super cerebrum se se diffudit sub inspiratione: at, dum expiravit animal, in tubo iterum apparuit aqua sanguine tincta, ut sub inspiratione iterum evanesceret. Post aliquot respirationis vicissitudines aqua in vitreo tubo non amplius in conspectum venit, nisi novam immittas; inferius enim descendit, et in cerebri anfractus se se insinuat. Hisce experimentis rite institutis, vim sanguinis, qui ad cerebrum veniat, poteris quadantenus dimetiri pulsuum numeris, et respirationis vicibus supputatis.

Jam vero cerebrum a proprio, et naturali volumine decrescere pluries vidi per totum superiorem ambitum, et etiam ad latera; et a falce hemisphæria recedere non semel vidi, quod ineluctabile imminutionis cerebri infra naturales limites argumentum vidit etiam HALLERUS in fele (*Mém. sur les parties sensibles et irritables*). Profecto si motum hujusmodi in cerebro, intacto etiam cranio, admisissent Auctores, ea qua diximus ratione, verisimilior visa fuisset res, et minoribus obnoxia difficultatibus: perpetuus ille nisus ad motum non adeo torsisset ingenium Parisiensis Physiologi, aliorumque. Cerebrum itaque in motum potest adduci, etiam cum dura meninx cranio undequaque firmiter adhæret, ab eadem superiori superficie prorsus semotum, et hac membrana cum adjuncta falce penitus revulsa, cerebrum æque pergit moveri: a vinculis libera dura meninx, cerebri motus sequitur obsequiosa

potius quam mobilis. Non enim dura meninx influit in motum cerebri respirationi alternum, ut jam constat ex superius adductis experimentis, quibus hoc etiam addas. Si in peracto foramine intra cranii parietes duram membranam in crucem secaveris, ut in quatuor partes dividas, et cuilibet parti filum adnectas, omnesque sursum simul trahas, videbis cerebrum æque moveri ac antea, et filis sibi relictis meninges videbis illico descendere, et de motu cerebri participare.

Cl. Lamure contendit, sanguinem eadem facilitate per pulmones transire, seu tempore quo expirat animal, seu quo inspirat, ut inde concludat motum cerebri a refluxu sanguinis per venas unice pendere. Unum discrimen, quod circuitus sanguinis obtinet in fœtu, et in lucem edito animali, opinionem refellit. At experimentum Hoochii, quod post Hallerum confirmatum vidi, sanguinem sub inspirationis periodo pulmones facilius ingredi luculenter demonstrat. Cum sanguis per pulmones non amplius meat, cum ventriculus cordis sinister jam immobilis quiescit, si valida inspiratione inflentur pulmones, denuo reviviscunt cordis intermissæ functiones, et pristinum sanguis rursus absolvit circuitum. Inspiratio igitur faciliorem reddit transitum sanguinis per pulmones, ut jam vitalia hæc organa totum accipiant sanguinem a sinistro cordis ventriculo provenientem: in dilatatum subsequenti tempusculo, et sanguine vacuum hunce ventriculum vi-

des libere omnino auriculam dexteram exonerari, et pari passu venam cavam, jugulares et jugularibus continuos sinus largo flumine depleri; atque hinc viscus in cranio contentum volumine imminui, flaccescere, in se concidere, et inferius descendere, jam intelligis.

Quamobrem respiratio turbat æquilibrium in sanguinis circuitu, ut varia fiat copia sanguinis in nonnullis corporis partibus sub varia inspirationis, aut expirationis periodo, et eo quidem magis pro varia harum functionum vi, magnitudine, diuturnitate. At vero majori sanguinis copiæ pulmonibus suppeditandæ impar foret dexter ventriculus cordis, nisi, cum sanguinem contentum dimiserit, ea copia rursus, et illico exciperet a superposita auricula, et ab appensis majoribus vasis, qua dimisit. Quod ratio suadet, experimenta confirmant in brutis viventibus capta. In inspiratione etenim vasa cordis majora, vena cava utraque, et jugulares venæ sanguine ita deplentur, ut vacuæ concidant, et orbentur colore. In cane per tempus sat longum venam jugularem inflari, sanguine repleri, rotundiorem fieri in expiratione, et vicissim concidere, flaccescere, et fere omnem sub inspiratione colorem amittere vidit immortalis HALLERIUS (*Mém. sur les parties sensibles, et irritables* ≐ *exp.* 100, quæ est sexta WALSTORFII). Ille 17 habet experimenta, WALSTORF 14, quæ probant motum alternum in truncis venarum, quæ sunt cordi proximiores, et jugularium in quadru-

pedibus mammariis. Hæ venæ turgent in expiratione, sub inspiratione deplentur, concidunt, et flaccescunt. Experimenta pluries iteravi, nec habeo, quod addam summorum virorum pulcherrimis tentaminibus.

Præterquamquod liberior sanguini via paratur per pulmones in inspirationis stadio, animadvertit pro more suo rectissime Hallerus, diaphragma in suo descensu cor cum appensis auriculis, et majora vasa deorsum trahere, pressioni tunc temporis minus obnoxia, ut ruentis jam sanguinis adaugeatur velocitas. Impedito autem diaphragmatis descensu, vel nullus est, vel exiguus admodum conspicitur motus cerebri, de quo loquimur, sicuti experiundo cognovi. Etiam considerare forsitan expedit in inspiratione non solum totam pulmonum substantiam, verum etiam partes omnes colli, quæ molles sunt, deorsum trudi. A laringe descensum dimetitus, ad pollicem et ultra hoc organum descendere pluries observavi in memetipso sub profundissimis inspirationibus. Partes omnes colli mobiles, et vel ipsam externam cutim sub inspirationibus descendere confirmant tactus et oculi: cervicis inferiores, anterioresque partes, ubi jugulorum flexus curvantur, supra sternum, et ad latera in fossam tunc manifesto profundantur. In universali hocce descensu partium trahuntur etiam jugulares venæ, quæ a superpositis partibus, uti vena cava a pulmonibus, forsitan aliquantisper emulgentur, ni potius velis superius, eodemque tempore anterius elatum sternum a subjectis partibus

removeri, itaut venæ factæ liberiores facilius queant depleri sanguine: una cum sterno musculus colli cutaneus ducitur anterius, dum larinx posterius recedit, et una inferius descendit. Sed simul conciliantur hæc omnia.

Dum igitur sub inspiratione jugularium trunci parumper incurvati in rectam lineam disponuntur, et memoratas ob causas vacuantur sanguine, amplum venosum marsupium, iisdem continuum, quod jugulari fossæ respondet, emulgent, et tunc sinus omnes cerebri, nexu multiplici ad invicem conjuncti, largo flumine in jugulariam ampullam sanguinem effundunt, quem ab omnibus venis cerebri refluum accipiunt. Atque ita congesto in sinubus, et universo venarum ambitu sanguine cerebrum depleri quam facillime poterit; atque inde etiam supra vacuatas hasce numerosas, peramplas cavitates concidere, ut in minus spatium colligatur, quin formam immutet superius subrotundum semper, et æquale. Hanc eandem cerebri formam præsefert dura meninx, dum uniformem ejusdem motum sequitur, si eadem fuerit per fere omnem ambitum a cranio divulsa; secus res evenit, si amplissimi vulneris oræ dura meninx adhæreat; tunc enim concavam formam acquirit sub inspiratione, ut in media sui parte profundius demergatur, dum in extrema circa vulnus ora e sede non dimovetur sua. Difficilis jam vero res intellectu non erit, cerebrum flaccescere, et recedere ab illo gradu summæ plenitu-

dinis, et turgescentiæ, qua cranium impleat, et ad volumen aliquantisper minus reduci eo tempore, quo ejusdem venæ cum sinubus deplentur, et post hanc concidentiam elevari, vel potius ad pristinum volumen restitui. Experimentis evicta res est: vena cava superiori intra pectus, vel ad cordis basim obtruncata, aut etiam vena cava inferiori in abdomine resecta, vel jugularibus deorsum emulgendo vacuatis, cerebrum concidit volumine imminutum.

In expiratione præsertim validiori pluribus de causis sanguis in cava, et jugularibus venis remoratur, quinimo usque ad cerebrum per easdem refluit. Ex alterna compressione thoracis LAMURE procreabat motum artificialem in cerebro denati, æque ac in vivo et respirante animali manifestum; et jam palam est ex his causis omnibus, quæ alterne comprimunt vasa venosa in thoracico cavo, vel secus collum locata, usque ad cerebrum contentum in iisdem sanguinem sursum promoveri; et etiam a morte, quæ vires sanguinem propellunt in cerebrum, vel ab eo revellunt, id agunt, ut hoc viscus in consuetos motus erumpat, ut in mortuis animantibus hunc motum possimus ad libitum imitari. Mihi tamen minoris momenti semper apparuit hic motus, quam in respirante animali. HALLERUS quoque animadvertit, dum cerebrum quiesceret immobile, turgidum factum fuisse a compressione thoracis. Hic Auctor pluries observavit auriculam dexteram propellentem sanguinem in venam cavam superiorem, et in

jugulares ipsas sanguinem propulsum vidit, qui subsequenti momento exsugebatur. (*Mém sur les parties sensibles et irrit. exp.* 128, 117, 482.) Quamobrem sanguis per hasce venas libere pòtest nunc sursum, nunc deorsum ferri, atque ita in æquabili circuitu diversimode perturbari. In expiratione vero sanguinem refluere posse usque ad cerebrum ex venarum pressione probat injectio liquoris etiam crassioris in venam cavam, qui facili prorsus negotio ad minora etiam cerebri vasa diducitur; idèm suadet valvularum defectus ab auricula cordis usque ad ultima cerebri minima vasa, si venæ cavæ et jugularis internæ nudum truncum spectes, non emissos ramos: ex quo valvularum defectu intelligitur, quare cum jugularium truncum per injectionem replemus, soleant venæ faciei, et externi capitis inanes manere, dum interim venæ cerebri, sinusque apte replentur. Præterea, si digitis venam cavam versus caput emulgeas, illico videbis cerebrum sursum attolli; et in demortuis, et in vivis etiam animantibus fui centies expertus, ad cerebri elevationem producendam sufficere eorumdem collum, etiam integrum, firmiter ad latera comprimere, ubi jugulares decurrunt, easdemque cuti subjectas trahere sursum.

In consuetis respirationibus, sanguinem ad cerebrum per venas appellere retrogrado motu HALLERUS inficiatur: in respiratione dumtaxat violentiori sanguinem per venas refluere concedit. Si deducere cerebri tur-

gorem malis a sanguinis venosi retardato cursu, nihil regeram. Facillime tamen per venas majores sanguinem refluere experimentis patet. Sic ipsemet HALLERUS (*Mém. sur les parties sensibles et irrit. exp.* 116) vidit in lac sugente adhuc scrofa, dum repetitis ut ita dicam, succussionibus expirationes moliebatur, sicuti his animantibus moris est, sanguinem singulis hisce repetitis ictibus expirationis ex pectore in jugulares, axillares, et humerales venas propulsum, qui in thoracis dilatatione per easdem venas redibat in pectus. Hac super re mihi etiam pulcherrimum est experimentum: anno 1810, die 13 junii, cum terebrassem caput asini junioris, et valde robusti ob posterius sinistrum crus a curru fractum ab hero derelicti, operatione peracta prope pertransivit turba sociorum, et tunc voce valida, et sonora cum ruderet animal, vidi singulis, iisque, ut ita dicam, dimidiatis ictibus expirationis, in crebra vocis explosione cerebrum concuti, et sursum tolli.

Ambigere ergo nulla ratione possumus, cerebrum redire ad pristinum gradum plenitudinis, et turgoris, a qua in inspiratione discesserat, retardato, vel sufflaminato itinere sanguinis a capite, plerumque etiam ab ejusdem per venas regressu ad caput. Inquirendum restat, utrum nobilissimum viscus ultra naturales limites elevari unquam possit. In terebratis animalibus cerebrum aliquantisper erigi supra internam cranii laminam constanter vidi, dum expiraret animal; et id præterea

experimentis evici. Canem bimestrem cum terebrassem, osseum circulum ex cranio diligenter avulsum iterum aptavi loco suo: laxe illud comprehendebatur ab ora rotundi vulneris in cranio peracti, ut duræ meningi insisteret: in expiratione autem cerebri elevationem moliente osseum circulum semper elevabatur ultra reliquum cranium immobile ad $\frac{1}{3}$ lineæ. Sed tum cerebri superficies per universum fere ambitum a parietibus osseis compressa validius per locum foraminis liberum elevabatur: maxima enim cranii portione ablata cerebri superficiem minus ascendere deprehendi, nec fere ultra illam altitudinem, qua cranii caveam adamussim repleret. In violentis animalium perforatorum conatibus, ut se se a vinculis expedirent, cerebrum ultra naturalem dimensionem prominere pluries observavi; et in cranii vulneribus cerebrum quandoque exprimi etiam funesto cum eventu ipsemet vidi, et viderunt jam pridem Auctores. In ipsis denatorum cadaveribus, si foramen in cranio perficias, ablatum os ut plurimum non contegit cerebrum, quin superius ultra foraminis oram consurgat ob majorem, quam cerebrum adeptus fuerit expansionem.

Verumtamen cranio etiam intacto, sanguinem super consuetam penum in cerebro colligi nil vetat, si in hoc viscus per venas refluat, vel ejusdem fluxus per aliquod tempus in jugularibus præpediatur. Inde jam intelligas, quare in hernia cerebri interdum hoc viscus in duram meningem vim faciat, eandemque foris pro-

pellat in tussi, sternutatione, aut fortiori quolibet nisu expirationis; quare in fracturis cranii, cum sanguinis, vel puris effusi copia duram membranam alluit, vehementior expiratio has materias expellat, et quare tussiens, sternuensque ægrotus cerebrum concutiat, et sursum evehat. En iterum quare dolor capitis ob tussim, diuturnioremve sermocinationem quibusdam sub adjunctis increscat. Ossa ipsamet cranii dimota vidit sub violenta vomitione illustris CALDANI. Anno 1808, die 6 aprilis, pecuario cani, antequam ejusdem cranium terebrarem, exhibueram aliquot grana tart. emet. in jusculo soluta: aperto cranio, singulis in conatibus vomitionis cerebrum prominere observavi. Spongiæ non immerito comparares cerebrum, quæ plus minusve repleta humoribus volumine crescit, aut imminuitur.

Diversis tempusculis profecto variat in cerebro, uti et in pulmonibus vitalis copia, cruoris, ut in mammiferis animantibus hæc viscera quadantenus inter se sint in inversa voluminis, ponderisque ratione. Ita per validam expirationem cerebrum magis magisque turgere, in longiori inspiratione multo minoris voluminis fieri cerebrum intuemur. Cani valde robusto, quem terebraveram, nares obturabam sub finem longissimæ inspirationis in maxima depressione substantiæ cerebralis: cerebrum sic depressum quiescebat per aliquot horæ minuta, et tarde admodum ascendebat sub hisce adjunctis ex remorato in diuturna inspiratione intra pulmonum parenchima circuitu sanguinis. Si vero eidem

nares obturarem sub finem expirationis in maximo turgore cerebri, hoc viscus nunquam trahebatur deorsum, quoadusque aditum permitterem aeri, novam inspirationem mulituro. Item dum celerrima fit in singultibus inspiratio, pro velociori inspirationis vicissitudine cerebrum ocius descendit. Venatico cani, ut mitiorem facerem, aliquid esculenti præbucram, et illico perforabam: post aliquot horæ minuta cœpit singultire, et in quovis singultu cerebrum descendebat celerius. Similiter aere in pulmones pedetentim admisso, lento pariter gradu cerebrum descendebat; cerebrum quoque iteratis, ut ita dicam, gradibus, seu succussibus, quibusdam sub adjunctis, descendere, et moveri semel et iterum observavi. Quamobrem in fletu, vel cum suspiriis, aut oscitatione laxamus pectus, profundius; sub anhelitu citatius moveri cerebrum pro certo habeas.

Vicissim in risu celerius, celerius validiusqne in sternutatione cerebrum elevabitur. Celerior autem est ascensus cerebri præ descensu; expiratio enim, utpote facilior, velocior est inspiratione in ratione 3 : 2. Ex prædictis vero explices morbosa quædam phænomena: cur, ex. gr., vomentibus facies turgeat, oculi cum tumore rubeant, cerebri vasa inflentur? cur nonnunquam in sanguineis, sumpto emetico, apoplexia successerit? Ita, reserato cadaverum cranio, vasa omnia encephali solito multo ampliora, et sanguine turgidiora deprehendit, quam in aliis soleat alio morbo demortuis, eximius Stoll in colica saturnina (*Ratio medendi pars II.*), et

quotquot meteorismo in acutis morbis moriuntur, vel tympanitici in chronicis, cerebrum turgidius præseferre ob vasa magis distenta, propriis observationibus possem confirmare. In rachiticis plus etiam sanguinis ad cerebrum venit, mirum inde quantum volumine caput increscat: in iisdem arteriæ carotides, et jugulares venæ ampliores fiunt; his autem turget abdomen. Quamobrem diaphragma cum vix, vel ne vix quidem sub inspiratione descendat, respiratione quadantenus impedita, sanguis majori copia stagnat in superioribus corporis partibus, præpedito etiam aliquanto in abdomine ejusdem circuitu.

Non est autem prætereundum silentio, cerebellum eadem ratione moveri, qua cerebrum. Walstorf motus cerebelli observare potuit in talpa, et cerebellum aliquantisper constringi, ut dimoveretur a parietibus cranii, vidit etiam Hallerus, Lamure pari cum evidentia observavit in cerebello elevationem, et concidentiam, quam in cerebro viderat in vivente adhuc cane, quos motus in denato animali denuo suscitabat alterna compressione thoracis. Eosdem in cerebello motus, quos in cerebro observaveram, mihi per breve admodum tempus intueri licuit in fele, in duobus cuniculis, et in robusto pecuario cane.

Cerebrum autem non intermittebat a motu, etiam ablata cinerea ejusdem substantia, et etiam magna parte cerebri destructa, et licet profundæ sedes cerebri violarentur, ut tandem conspicere potuerim ma-

ximum hujusce motus momentum, qui respirationi respondet, esse super foramina lacera. Sive integrum spectes hoc viscus, sive illud partim jam resecueris, in summo vertice, et in mediis ejusdem lobis majoris etiam momenti videtur hic motus, qui a respiratione pendet, licet cerebrum moveatur motu uniformi in singulis suis partibus. Ablatis superioribus stratis cerebri, si fas est ita loqui, in fele, successive auferendo strata superiora, tandem perveni ad corpus callosum; quod aliquantisper particeps erat mutationis. At vero non solum ex sinuum depletione alterna, ut quidam scripserunt, verum etiam ex venarum omnium, quæ vel cerebro subsident, aut per ejusdem substantiam distribuuntur alterna vacuatione, motu uniformi mehercule agitatur cranio contentum nobilissimum viscus. Non infrequenter cernuntur venarum rami serpentes in superficie cerebri sanguine turgidiores in maxima hujus visceris elevatione, dum interim minoris diametri videntur fieri in ejusdem concidentia. In terebratis animalibus pluries itidem sum intuitus sensibilem depletionem in sinu falciformi inspirationis tempore, qui modo flaccesceret sanguine vacuus, aut cruore repletus plurimum turgeret sub expirationis periodo, et hoc idem vidit Hallerus.

Major profecto est motuum venosorum ratio præ arterioso; sed si compares lumina omnium sinuum, et venarum omnium, quæ dumtaxat sub inspiratione deplentur, longe superant summam luminum arteriarum,

quæ ad cerebrum veniunt, quæque sub completo respirationis stadio quatuor pulsationes absolvunt. Motus autem venosus cerebri plurimum variare potest pro varia positione animantis. Si posterioribus pedibus animantia terebrata suspenderem capite pendulo, vix amplius hunc motum poteram conspicere, ob sanguinis pondus, et propter difficiliorem sinuum vacuationem. Capite antrorsum declivi, sive in latus converso cerebrum non cessabat a motu, verumtamen tunc maxime in conspectum veniunt motus cerebri, cum animal in naturali positura locatur. Ex mutato autem capitis situ variare potest in cerebro copia sanguinis in animantibus, et etiam in homine. Ita observamus quandoque in hominibus horizontali situ in lecto decumbentibus caput tumere, et tumorem brevi evanescere, dum corpus erigitur. Videmus item in pluribus ægrotis valide delirantibus increscere delirium capite supino, paullulum minui erecto corpore.

Ex hactenus dictis jam possumus, certis innixi principiis, explicare quarundam partium utilitatem, et usum, quæ occurrunt in homine, et quibuscumque verum est diaphragma animantibus, mutabile motu cerebrum nactis. Inde enim intelligis, quare in istis animantibus pulmonares venæ, quæ liberrimo, et æquabili fluxu vitalem laticem in sinistram cordis auriculam exonerare valent, minores sint per arteriis pulmonaribus, quæ sub inspiratione dumtaxat sanguinem libere transvehunt. Magni quidem momenti est elemen-

torum copia, quæ sanguis dimittit in pulmonibus: hæc tamen non erit præcipua ratio, qua tam exiguo donentur lumine pulmonum venæ, sicuti recentiores physiologi contendunt. Major principiorum deperditio in renibus contingit, attamen, si compares vasorum diametrum, et sanguinis copiam appellentis ad hæc organa, discrimen non invenies, quod inter pulmonum venosa, et arteriosa vasa intercedit. Vicissim causam nunc vides, quare tam amplo venæ cavæ, et jugulares donentur lumine in homine, et quadrupedibus viviparis præ arteria aorta: nimirum per corpus universum in arteriarum systemata liberrimo semper fluxu sanguis prætervehitur, dum quovis expirationis tempusculo maximam retardationem experitur in venis, præcipue cordi propioribus, ob impeditum tunc temporis per pulmonum arterias sanguinis circuitum.

Revera venæ pulmonum ex illustri Cuvier ejusdem fere diametri sunt, ac arteriæ in amplissima volucrum familia, in quibus a respiratione non perturbatur sanguinis æquilibrium in partibus. Pulmonares arteriæ in hisce animantibus libere omni periodo deponunt sanguinem in pulmones continuo expansos, et pressionem nescientes a thoracis lateribus, aut a diaphragmate, quo carent. Quare cum recepto per auriculam sanguine dexter ventriculus cordis vacuari libere possit in pulmones per omne tempus, rationem videas cur in avibus vena cava superior, eademque sinistra proxime intra ventriculum finem habeat. Inde etiam intelligas,

quare pulmonares volucrum arteriæ minoris diametri sint, servata proportione, ad aortam, quam in mammiferis animantibus, licet sanguis omnis illas æque præterfluat in ave, ac in mammiferis animantibus; quemadmodum facile est intelligere, quare sanguis, qui in volucre per ampliorem superficiem obiicitur aeri, uno cruore constet, quin serum dimittat, sicuti iteratis observationibus confirmavi. Hinc majorem capacitatem intelligas auriculæ cordis dexteræ in homine, et animantibus mammiferis, quæ longe minor in ave reperitur. Hinc etiam videas, cur tam amplo vena cava, et majori jugulares donentur lumine in iis animantibus secus, ac in volucre; cur in illis motu alterno turgeant, in avibus non item. Inde veram sinuum utilitatem percipias in animantibus, quæ iisdem donantur, quibus nunquam volucres instructos vidi.

Ob easdem causas rationem attingas, quare in delfino, in porculo marino, et forte in omnibus cetaceis ex celeberrimo Cuvier arteriarum pulmonalium parietes crassi æque sint ac in aorta. Hanc rem observare semel potui in annosa lutra, in qua præterea inveni venam cavam utramque in immensum saccum expansam, et foramen ovale aliquantisper hiare vidi in parte superiori. Isthæc animalia ad diutinum tempus degunt sub aquis, et cum tunc temporis respiratione cohibita sanguis difficilius præterfluat pulmones, in maximas istas venas congeritur, et cumulatur; sed statim atque de aquis emerserint, maxima copia, et vi, et impetu pul-

monares arteriæ sanguinem deferunt ad organa pneumatica, retardatum, vel etiam prorsus impeditum in iisdem circuitum compensaturæ, hinc necessario majores, crassioresque.

Facili illatione, et vel sponte inde fluit, memoratas ob causas venoso motu non gaudere cerebra volucrum, quæ sinubus carent, in quibus tentorium cerebelli perbrevi ossea lamina fulcitur, in quibus foramen lacerum posterius in cranio, cujus forte etiam aliquæ sunt partes in hocce motu, frustra quæres. Hemisphæria cerebri præterea circumvolutionibus carent in avibus; et ob corporis callosi defectum, non tot, neque tantis donatur cavitatibus cerebrum in ave: hinc minora numero esse, et minora diametro vasa observavi, quæ ad volucris cerebrum feruntur, diversa insuper dispositione donata. Circumvolutiones cerebri aliquid influere in hunc motum probat observatio, qua in asino, equo, in fele, in canibus, in quibus numerosiores sunt, amplioresque anfractus cerebri, majoris etiam momenti hunc motum conspexi, dum interim in cuniculis, lepore, in quibus circumvolutiones sunt parum profundæ, minus sensibilis evadit hic motus. Quo enim ampliores, et numerosiores sunt anfractus cerebri, eo majora, et numerosiora vasa ibidem veniunt. In ave motum hunc non vidisse jam scripserat SCHLICHTING, sed unico exemplo non poterat res definiri. At venoso motu revera carere vidi cerebra volucrum in gallo nostrate pluries, in duobus columbis item, et in turture,

in meleagro-gallo-pavone, in ansere, in anatibus tum domesticis, cum sylvestribus, in turdo iliaco, et canoro, in perdice, in coturnice, luscinia, et motacillis pluribus, in fringilla cælibi, in cardueli, canaria, cui præ ceteris animantibus maximum cerebrum, et in pluribus aliis diversi generis avibus, quas jam nimis longum foret recensere. In piscibus item, et in reptilium classe, in quibus tubercula, vel ganglia potius dixeris, quam verum cerebrum, et quæ perfectis sunt destituta pulmonibus, hosce motus frustra quæsivi.

FAUTES *A CORRIGER*

Pag.	*Hist.*	*Ligne.*	
LXXI	supérieure	25	postérieure
	Mém. des Acad.		
III	de ces lunettes	18	de ses lunettes
III	autour	28	au tour
112	déterminées	3	terminées
163	voyez à la figure I	5	voyez à la figure 1
233	ainsi qu'il	17	ainsi qu'elle
239	$\pm \frac{1}{1.2.3.(2^{\nu}-1)}$	4	$\pm \frac{1}{1.2.3 \ldots (2^{\nu}-1)}$
310	$\int\int 2ydye^{-x^2 y^2}.\cos.rx,$	22	$\int\int 2ydydxe^{-x^2 y^2}.\cos.rx,$
340	$r > r'$	7	$r > 2r'$
340	$\int \frac{dx.\overline{\sin.x}^2 . \overline{\cos.rx}^3}{x}$	11	$\int \frac{dx.\overline{\sin.rx}^2 . \overline{\cos.rx}^3}{x}$
504	Je finirais	21	Je finirai
	Mém. prés.		
71	Conforraminavi	9	Conferruminavi
89	per arteriis	26	prae arteriis.





